

УДК 517.929

ОЦЕНКА ИНВАРИАНТНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ АТТРАКТОРОВ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. В. Алешин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
(ЯрГУ им. П. Г. Демидова)
Научный центр РАН в Черноголовке

Среди инвариантных характеристик динамических систем большую роль играют ляпуновские показатели и ляпуновская размерность. Анализ спектра показателей Ляпунова широко применяется для исследования сложной динамики в системах обыкновенных дифференциальных уравнений и в моделях, сводящихся к отображениям. В конечномерном случае, по теореме Оселедца, линеаризованная на аттракторе система обыкновенных дифференциальных уравнений всегда является правильной по Ляпунову, и, тем самым, верхний предел может быть заменён обычным, что позволяет эффективно вычислять показатели Ляпунова. В статье рассматривается вопрос вычисления показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, для которого данная теорема, вообще говоря, не работает. Приводятся результаты тестирования разработанного алгоритма для уравнения Хатчинсона. Отмечено хорошее совпадение результатов численного моделирования с утверждениями аналитического плана. Иллюстрируется применение алгоритма к некоторым задачам. В частности, рассматривается система уравнений Ланга-Кобаяши на возможность получения режима гиперхаоса.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (РНФ) (проект № 14-21-00158).

Ключевые слова: показатели Ляпунова, системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, уравнение Хатчинсона, модель Ланга-Кобаяши.

ВВЕДЕНИЕ

Определение показателей Ляпунова можно найти в книге Б. Ф. Былова и др. (1966). Для линейной системы из n уравнений, записанной в векторной форме,

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор действительных чисел длины n , а $A(t)$ — $n \times n$ матрица, показатель решения определяется формулой

$$\chi = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|.$$

Случаи, когда показатели удаётся найти аналитически, исключительно редки. Для вычисления старшего показателя обычно применяют метод Бенеттина [Benettin et al., 1980]. Дальнейшее развитие данный метод получил в работе [Wolf et al., 1985]. В ней в вычислительный алгоритм авторы добавили перенормировку начальных условий по алгоритму Грамма-Шмита [Гантмахер, 1966], что позволило вычислять спектр показателей Ляпунова.

В конечномерном случае, по теореме Оселедца [Оселедец, 1968], линейризованная на аттракторе система вида (1) всегда является правильной по Ляпунову, и, тем самым, верхний предел может быть заменён на обычный, что позволяет эффективно вычислять показатели Ляпунова. В случае уравнений с запаздывающим аргументом и краевых задач такую теорему доказать не удаётся. Поэтому при разработке алгоритмов вычисления ляпуновских экспонент важно иметь модельное уравнение с запаздыванием, для которого спектр этих экспонент может быть вычислен каким-либо другим способом. Наличие такой задачи позволяет протестировать разработанный алгоритм и убедиться в его работоспособности.

В настоящей статье описывается расширение стандартного алгоритма для вычисления нескольких первых показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t), x(t - \tau)),$$

где $F(t, x(t), x(t - \tau))$ — достаточно гладкая функция.

Приводятся результаты тестирования указанного алгоритма на примере уравнения Хатчинсона [Hutchinson, 1948]. Иллюстрируется применение разработанного алгоритма для вычисления спектра ляпуновских экспонент системы Ланга-Кобаяши [Глазков, 2008].

Оцениваемые инвариантные характеристики отображений не являются в строгом смысле именно показателями Ляпунова. Но для случая равновесия в уравнении Хатчинсона, как будет показано ниже, получены результаты, иллюстрирующие «близость» оцениваемых характеристик и ляпуновских экспонент.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Опишем алгоритм получения первых K показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида:

$$\frac{dx_0}{dt} = F(t, x_0(t), x_0(t - \tau)), \quad (2)$$

где для $\forall t x_0(t) \in \mathbb{R}^J$; J — размерность системы.

В качестве фазового пространства примем пространство непрерывных на отрезке $[-\tau, 0]$ функций в \mathbb{R}^J , а именно $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^J)$.

Для решения системы (2) численными методами требуется перейти от непрерывного времени к дискретному. Для этого выберем $N + 1 \geq K$ точек, с помощью которых разобьём отрезок длины τ на N равных частей. Длина каждой части будет равна $\delta = \tau/N$.

В качестве численного метода для решения системы (2) с начальными условиями

$$x_0(\varphi) = f_0(\varphi), \quad \varphi \in [-\tau, 0], \quad f_0(\varphi) \in \mathbb{R}^J \quad (3)$$

выберем метод Дормана-Принса восьмого порядка (DOPRI853) [Hairer et al., 2008] с постоянным шагом (в качестве длины шага выберем δ).

Будем решать данную систему (2) с соответствующим начальным условием (3) выбранным методом до момента времени θ — времени достаточного приближения траектории решения к аттрактору. При этом на промежутке $t \in [\theta - \tau, \theta]$ получим решение $x_0^0(t) \in \mathbb{R}^J$, которое в дальнейшем будет выступать в качестве начального условия. Используя его, получим решение $x_*(t) \in \mathbb{R}^J$, на котором будем оценивать ляпуновские показатели.

Дополним систему уравнений (3) с начальным условием $x_0^0(t)$ следующими K идентичными системами

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bx_i(t - \tau), \quad (4)$$

где

$$A = \{a_{ij}\}; \quad a_{ij} = \frac{\partial F_i(t, x_*(t), x_*(t - \tau))}{\partial x_j(t)}; \quad B = \{b_{ij}\}; \quad b_{ij} = \frac{\partial F_i(t, x_*(t), x_*(t - \tau))}{\partial x_j(t - \tau)};$$

$$i = 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, J;$$

$$F(t, x_*(t), x_*(t - \tau)) = \left(\begin{array}{c} F_1(t, x_1(t), \dots, x_j(t), x_1(t - \tau), \dots, x_j(t - \tau)), \dots \\ F_J(t, x_1(t), \dots, x_j(t), x_1(t - \tau), \dots, x_j(t - \tau)) \end{array} \right)^T.$$

Они представляют собой линеаризованные на решении $x_*(t)$ системы уравнений (2). Для каждого уравнения из $K \times J$ уравнений системы

$$x_{i,j}^0(\varphi) = \sqrt{\frac{KJ}{N}}, \quad (5)$$

при $\varphi \in \left[(\theta - \tau) + \frac{N(iJ + j - 1)}{KJ}, (\theta - \tau) + \frac{N(iJ + j)}{KJ} \right], \quad i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, J$ и

$$x_{i,j}^0(\varphi) = 0 \quad (6)$$

— в противоположном случае.

Таким образом:

- 1) евклидова норма начального условия i -й системы уравнений из (4) равна единице:

$$x_i^0(t) = 1 = \sqrt{\sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^J x_{i,j,k}^2}, \quad i = 1, \dots, K; \quad (7)$$

- 2) скалярное произведение начального условия i -й системы уравнений на s -ю равно нулю $i \neq s$:

$$\left(x_i^0, x_s^0(t) \right) = \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^J x_{i,j,k}^2 x_{s,j,k}^2 = \delta_{i,s}, \quad (8)$$

где $\delta_{i,s}$ — символ Кронекера; $x_{i,j,k}^2$ — квадрат значения функции $x_{i,j}^0(\varphi)$ в точке $(\theta - 1) + kN/K + vN/(KJ), k = 1, \dots, N, v = 1, \dots, J$.

Решая совместно систему (2) с начальным условием $x_0(\varphi) = x_0^0(\varphi)$ и системы уравнений (4) с начальными условиями (5), (6) ($\varphi \in [\theta - \tau, \theta]$) на проме-

жутке $t \in [\theta, \theta + T]$ получаем для каждой из систем решения $x_i^1(t) \in \mathbb{R}^J$ ($i = 0, \dots, K$).

Учитывая, что величины x_i^k ведут себя экспоненциальным образом, необходимо время от времени их перенормировывать. Отметим, что проблему представляет как неограниченный рост, так и стремление решения к нулю. Выбор времени перенормировки T можно осуществлять двумя различными способами: через равные промежутки времени или динамически [Глызин, 2007].

Далее на промежутке $t \in [\theta + T - \tau, \theta + T]$ ортонормируем полученные решения $x_i^1(t)$, $i = 1, \dots, K + 1$ методом Грама-Шмидта [Гантмахер, 1966]. При этом после процедуры ортогонализации и до начала процедуры нормирования вычисляем и запоминаем величины

$$\xi_i^1 = x_{\text{орт}}^1(t). \quad (9)$$

Затем повторно решаем систему (2), (4), где в качестве начальных условий используем полученные ортонормированные решения.

Посчитав

$$\lambda_i = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^M \xi_i^k}{TM}, \quad i = 1, \dots, K + 1, \quad (10)$$

получаем оценку показателей Ляпунова.

Перейдём к результатам тестирования алгоритма.

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ ПРИВЕДЁННОГО АЛГОРИТМА НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ ХАТЧИНСОНА

Подробные результаты тестирования алгоритма приведены в работе [Алешин, 2012]. Повторим кратко основные результаты. Вычислительные эксперименты проводились для уравнения Хатчинсона, динамика которого была ранее изучена в работе [Глызин, 2007]. Оно имеет следующий вид:

$$\dot{x}_0 = rx_0(t)(1 - x_0(t-1)), \quad (11)$$

где $r > 0$.

Ненулевые решения уравнения (11) асимптотически устойчивы при $r \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, причём, при $r \in [0, e^{-1}]$ монотонно, а при $r \in \left[e^{-1}, \frac{\pi}{2}\right]$ решение стремится к единице колебательным образом. В этом случае показатели Ляпунова для уравнения Хатчинсона совпадают с действительными частями решений следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \tau + r \cos \omega e^{-\tau} = 0, \\ \omega + r \sin \omega e^{-\tau} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Действительные части τ , решения данной системы при r , равных 1,5 и 1,0, представлены во вторых столбцах табл. 1 и 2. Будем называть их эталонными значениями.

Для уравнения (11) линеаризованные уравнения имеют следующий вид:

$$\dot{x}_i = r(1 - x_0(t-1))x_i(t) - rx_0(t)x_i(t-1). \quad (13)$$

Для всех опытов использовались следующие параметры:

- количество вычисляемых показателей Ляпунова $K = 10$;
- время выхода на аттрактор $\theta = 150$;
- время перенормировки вектора начальных условий $T = 4$;
- количество пересчётов показателей Ляпунова $M = 5000$;
- начальное условие $x_0(\varphi) = 1/2 \sin \varphi + 1$, где $\varphi \in [-1, 0]$.

Таблица 1. Первые десять показателей Ляпунова для уравнения Хатчинсона при $R = 1,5$ и их разность с эталонными значениями

i	τ_i	λ_i	σ_i
1	-0,0328	-0,0331	0,0003
2	-0,0328	-0,0332	0,0004
3	-1,6509	-1,6521	0,0012
4	-1,6509	-1,6521	0,0012
5	-2,2447	-2,2462	0,0015
6	-2,2447	-2,2462	0,0015
7	-2,6130	-2,6145	0,0015
8	-2,6130	-2,6145	0,0015
9	-2,8811	-2,8827	0,0016
10	-2,8811	-2,8827	0,0016

Таблица 2. Первые десять показателей Ляпунова для уравнения Хатчинсона при $R = 1$ и их разность с эталонными значениями

i	τ_i	λ_i	σ_i
1	-0,3181	-0,3186	0,0005
2	-0,3181	-0,3187	0,0006
3	-2,0623	-2,0637	0,0014
4	-2,0623	-2,0637	0,0014
5	-2,6532	-2,6548	0,0016
6	-2,6532	-2,6548	0,0016
7	-3,0202	-3,0219	0,0017
8	-3,0202	-3,0219	0,0017
9	-3,2878	-3,2895	0,0017
10	-3,2878	-3,2895	0,0017

Перейдём к результатам численного моделирования.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование проводилось для системы уравнений Ланга-Кобаяши [Глазков, 2008] динамики полупроводникового лазера, учитывающей воздействие отражённого излучения на резонатор:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \nu(1 + i\alpha)EZ + \gamma e^{i(\omega - \omega_0)t} E(t-h), \\ \frac{dZ}{dy} = Q - Z - (1 + Z)|E|^2, \end{cases} \quad (14)$$

где $E(t)$ — комплексная амплитуда электрического поля; $Z(t)$ — инверсия носителей, $\gamma > 0$ — интенсивность внешнего излучения; ω и ω_0 — оптические частоты задающего и синхронизируемого лазера соответственно; Q — превышение током накачки первой пороговой величины; ν — отношение времени затухания инверсии носителей и инверсии фотонов в резонаторе; α — коэффициент уширения линии, отвечающий за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля.

Для проведения вычислений перепишем систему уравнений (14) относительно вещественной и мнимой частей, и делая замену $E(t) = E(t)e^{i\omega t}$, полагая $E = x_0 + iy_0$, имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = -\omega y_0 + \nu z_0(x_0 - \alpha y_0) + \\ \quad + \gamma [x_0(t-h)\cos((\omega - \omega_0)h) - y_0(t-h) - y_0(t-h)\sin((\omega - \omega_0)h)]; \\ \dot{y}_0 = \omega x_0 + \nu z_0(y_0 + \alpha x_0) + \\ \quad + \gamma [y_0(t-h)\cos((\omega - \omega_0)h) + x_0(t-h)\sin((\omega - \omega_0)h)]; \\ \dot{z}_0 = Q - z_0 - (1 - z_0)(x_0^2 + y_0^2). \end{cases} \quad (15)$$

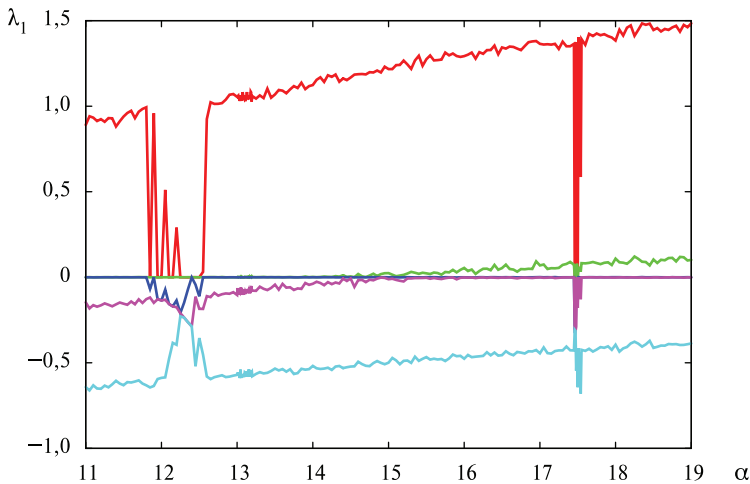
Линеаризованная на решениях $x_{i,*}, y_{i,*}, z_{i,*}$ система уравнений Ланга-Кобаяши имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \nu z_0 x_i - y_i(\nu z_0 \alpha + \omega) + \nu z_i(x_0 - \alpha y_0) + \\ \quad + \gamma [\cos((\omega - \omega_0)h)x_i(t-h) - y_i(t-h)\sin((\omega - \omega_0)h)]; \\ \dot{y}_i = \nu z_0 y_i + x_i(\nu z_0 \alpha + \omega) + \nu z_i(y_0 - \alpha x_0) + \\ \quad + \gamma [x_i(t-h)\sin((\omega - \omega_0)h) + y_i(t-h)\cos((\omega - \omega_0)h)]; \\ \dot{z}_i = -2(1 + z_0)x_0 x_i + 2(1 + z_0)y_0 y_i + z_i [1 + (x_0^2 + y_0^2)]. \end{cases} \quad (16)$$

На рисунке изображена зависимость первых пяти показателей Ляпунова от параметра α . Его значения изменялись в промежутке от 11 до 19. Красной линией нанесён график старшего показателя Ляпунова (λ_1). Остальные показатели, занумерованные в порядке возрастания (сверху вниз), изображены кривыми, нанесёнными, соответственно, зелёной, синей, фиолетовой и голубой линиями.

При значениях параметра α от 11 до 12 старший показатель Ляпунова системы Ланга-Кобаяши положительный, второй и третий — близки к нулю, третий и четвёртый — отрицательны. На этом промежутке установлен хаотический колебательный режим.

На промежутке от 12 до 12,6 хаотические колебания многократно сменяются периодическими, что видно из резких провалов значений старшей ляпуновской экспоненты до нуля. Далее при росте значений α до 14,7, как и в первом случае, есть один положительный показатель, два нулевых и два отрицательных.



Зависимость первых пяти показателей Ляпунова уравнения (15) от параметра α при $Q = 10$, $\nu = 2$, $\gamma = 2$, $\omega = 0,3$, $\omega_0 = 1$, $h = 1$

На промежутке от 14,7 до 17,46 присутствуют два положительных, два нулевых и один отрицательный показатель. Наличие двух положительных показателей Ляпунова указывает на появление режима гиперхаоса [Kaplan, Yorke, 1979].

Далее, при α от 17,46 до 17,5 находится промежуток, на котором хаотический режим сменяется периодическим, но при дальнейшем росте параметра вновь возвращается режим гиперхаоса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен вопрос вычисления показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Описан алгоритм получения нескольких первых ляпуновских экспонент. Приведён тестовый пример. Исследована система уравнений Ланга-Кобаяши на возможность получения режима гиперхаоса.

ЛИТЕРАТУРА

- [Алешин, 2012] Алешин С. В. Вычисление спектра показателей Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Заметки по информатике и математике. 2012. № 4. С. 7–12.
- [Былов и др., 1966] Былов Б. Ф., Виноградов Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
- [Гантмахер, 1966] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 2-е изд., М.: Наука, 1966.
- [Глазков, 2008] Глазков Д. В. Особенности динамики модели Ланга-Кобаяши в одном критическом случае // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15. № 2. С. 36–45.
- [Глызин, 2007] Глызин С. Д. Учёт возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14. № 3. С. 29–42.

- [Глызин и др., 2005] *Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 268–273.
- [Кашенко, Майоров, 2009] *Кашенко С. А., Майоров В. В.* Модели волновой памяти. М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
- [Оседедец, 1968] *Оседедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. матем. об-ва. 1968. Т. 19. С. 197–231.
- [Benettin et al., 1980] *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application // *Meccanica*. 1980. V. 15. P. 9–30.
- [Hairer et al., 2008] *Hairer E., Wanner G., Norsett S. P.* Solving Ordinary Differential Equations 1 (Springer Series in Computational Mathematics): Nonstiff Problems. 2nd ed., revised. Springer, 2008.
- [Hutchinson, 1948] *Hutchinson G. E.* Circular causal in ecology // *Annals of the New York Academy of Sciences*. 1948. N. 50. P. 221–246.
- [Kaplan, Yorke, 1979] *Kaplan J. L., Yorke J. A.* Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations, in *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points* (Springer Lecture Notes in Mathematics. V. 730) / Ed. H.-O. Peitgen, H.-O. Walter. Springer, Berlin, 1979. P. 228–237.
- [Wolf et al., 1985] *Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D*. 1985. V. 16. P. 285.

THE NUMERICAL EVALUATION OF ATTRACTORS EXPONENTS OF DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM

S. V. Aleshin

P.G. Demidov Yaroslavl State University (P.G. Demidov YSU)
Science Center in Chernogolovka, Russian Academy of Sciences

Lyapunov exponents and Lyapunov dimension play an important role among the invariant characteristics of dynamic systems. Analysis of the spectrum of Lyapunov exponents are widely used to study the complex dynamics in systems of ordinary differential equations and models that can be reduced to the maps. As follows from the Oseledets theorem in the finite-dimensional case the linearized on attractor system of the ordinary differential equations is always Lyapunov proper and thus the upper limit may be replaced by a normal limit, that allowing to effectively compute Lyapunov exponent. In this article we considered the question of numerical evaluation of Lyapunov exponents for delay differential equations. The Oseledets theorem not proved in this case. We tested our developed algorithm on Hutchinson equation with known Lyapunov spectra. Then algorithm was apply for Lang-Kobayashi model and we got the hyper chaos regime.

Keywords: Lyapunov exponents, delay differential equations, Hutchinson equation, Lang-Kobayashi model.