

ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОВОРА-ПЕТРОВСКОГО-ПISКУНОВА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.В. Алешин

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова (ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
Научный центр РАН в Черногоровке

Рассматривается задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией (уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова с запаздыванием). Проведен численный анализ процесса распространения волны. Выделены значения запаздывания, для которых характерно появления различных пространственно неоднородных режимов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

Ключевые слова: уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова, диффузия, запаздывание, численные методы.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнением Колмогорова-Петровского-Пискунова (далее уравнением КПП) называют логистическое уравнение с диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u), \quad (1)$$

Здесь $t > 0$ – временная переменная, а $x \in (-\infty, \infty)$ – пространственная. В основополагающих работах о процессе распространения генной волны А.Н. Колмогорова [Колмогоров и др., 1937] и Р.А. Фишера [Fisher, 1937] рассмотрен вопрос о таких неотрицательных решениях $u(t, x)$, для которых $t > 0$ при каждом выполнении условия: $u(t, x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ и $u(t, x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Показано, что при $t \rightarrow \infty$ функция $u(t, x)$ принимает определенную форму. Обзор результатов для уравнения (1) приведен в работах Данилова [Danilov et al., 1995], Мюррея [Murray, 2001] и Вольперта [Volpert et al., 2000].

Для любых классических граничных условий (например, для условий Неймана: $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{x=b} = 0$; периодических граничных условий $u(t, x + T) \equiv u(t, x)$

и др.) уравнение (1) имеет только один аттрактор – однородное состояние равновесия $u_0 \equiv 1$. Все остальные состояния равновесия неустойчивы.

Здесь будут рассматриваться уравнения КПП с запаздыванием [Алешин и др., 2015]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u(t - \tau, x)), \quad (2)$$

где $\tau > 0$ – величина запаздывания, $u(t,x)$ – достаточно гладкая по x и t функция при $t > 0$ и $x \in (-\infty, \infty)$. Кроме этого будем предполагать, что $u(t,x) \equiv 0$ при $a < x < b$. При этом разницу $|a-b|$ будем считать достаточно большой для того, чтобы увидеть распространение волны до момента встречи фронта с границами a или b .

Устойчивые неоднородные по пространственной переменной решения уравнения (2) с периодическими краевыми условиями и условиями Неймана были численно проанализированы в статьях [Глызин, 2009; Glyzin, 2013] и [Глызин и др., 2010].

Перейдем к описанию вычислительной процедуры. В уравнении (2) вторую производную по пространственной переменной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ заменим второй разделенной разностью. Для этого отрезок $[a,b]$ разобьем на N равных частей и построим сетку узлов с шагом $h = \frac{b-a}{N}$: $x_j = a + jh$, где $j = 0, \dots, N-1$. Обозначим через $u_j(t)$ значение функции $u(t,x)$ в соответствующих узлах сетки. В итоге получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + u_j (1 - u_j(t - \tau)). \quad (3)$$

Для учета краевых условий полагаем $u_{-1}(t) \equiv u_N(t) \equiv 0$.

Моделирование проводилось на вычислительном кластере ЯрГУ. Одновременно решалось от $N = 0,9 \times 10^5$ до $N = 1,8 \times 10^5$ уравнений. Особенностью численного решения такого большого количества дифференциальных уравнений с запаздыванием является повышенная требовательность к объемам доступной памяти для хранения всего решения на промежутке запаздывания. В связи с чем решение приходилось сохранять на жестком диске кластера, что существенно замедляло процедуру расчета.

Для вычислений использовался метод Дормана-Принца пятого порядка с переменной длиной шага интегрирования [Hairer et al., 2008]. Абсолютная и относительная погрешность алгоритма была установлена в значение 10^{-12} . Начальный шаг интегрирования равен 10^{-3} .

Начальные условия выбраны в виде прямоугольного импульса высоты 0,1 и единичной ширины, расположенного в центре отрезка $[a,b]$ для всех $-\tau \leq t \leq 0$. В частности, для случая $x \in [0, 1800]$:

$$u_j(t) = \begin{cases} 0,1, & j \in [89950, 90050], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4)$$

где $t \in [-\tau, 0]$. Для последующего анализа полученные данные прореживались.

Перейдем к результатам моделирования. Описание поведения уравнения КПП с запаздыванием будем проводить в сравнении с классическим уравнением КПП без запаздывания. На рис. 1 представлено распространение волны постоянной высоты от начального всплеска единичной ширины и высоты 0,1. Отметим, что скорость распространения волны равна углу наклона профиля волны на соответствующих рисунках.

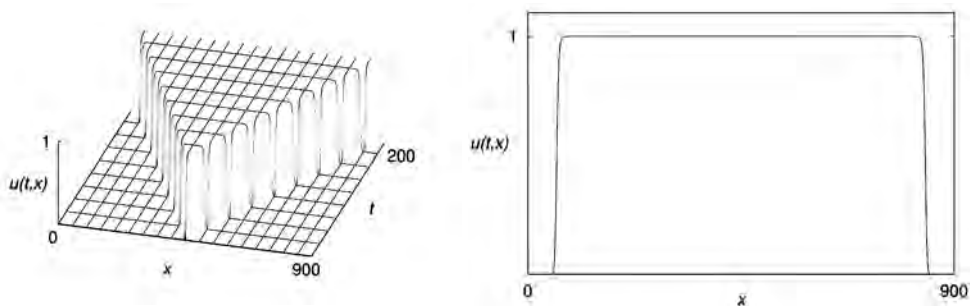


рис. 1. Решение системы (3) при $\tau = 0$. Слева распространение волны на плоскости (x, t) . Справа разрез при $t = 200$

Рассмотрим теперь систему (3) с ненулевым запаздыванием. При увеличении параметра τ можно выделить несколько этапов качественно различного поведения решений системы. Точные значения границ промежутков запаздывания приведены в работе [Алешин и др., 2015].

При относительно малом значении τ поведение решения практически идентично поведению системы КПП без запаздывания.

При увеличении τ примерно до $\frac{\pi}{2}$ распространение волны начинает сопровождаться некоторым количеством осцилляций в районе ее фронта. Так при $\tau = 1$ на рис. 2 показана такая волна.

В этом случае максимальная амплитуда всплеска равна примерно 1,2, при том, что после прохождения фронта волны значение $u(t, x)$ устанавливается равным единице.

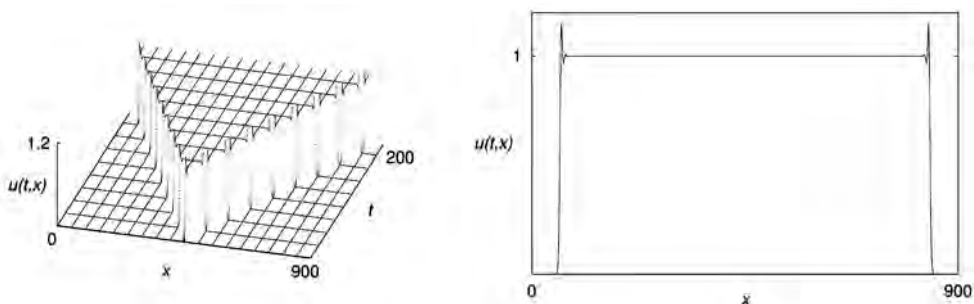


рис. 2. Решение системы (3) при $\tau = 1$. Слева распространение волны на плоскости (x, t) . Справа разрез при $t = 200$

Следующее существенное изменение в распространении фронта волны задачи (3) наблюдается при $\tau \geq \frac{\pi}{2}$. Отметим, что при этом условии уравнение $\dot{y} = u(1 - u(y - \tau))$ имеет устойчивое периодическое решение. В этом случае фронт распространения волны содержит довольно большое число интенсивных осцилляций, распространяющихся с той же скоростью, что и фронт волны у стандартного уравнения КПП. После некоторого количества интенсивных осцилляций

после фронта волны величина $u(t,x)$ быстро сходится к значению единица за исключением центральной области, в которой появляется след от начального прямоугольного импульса, распространяющийся существенно медленней, чем фронт волны (см. рис. 3).

Для того, чтобы прояснить характер распространения волны в этом случае, на рисунке 3 даны разрезы решения при $x = 900$ и $t = 400$ соответственно. Из рисунка 3 видно, что колебательный режим в центральной области близок, но не тождественен колебаниям решения логистического уравнения с запаздыванием и диффузией и периодическими краевыми условиями. Полученные результаты хорошо согласуются с тем, что локальная динамика данного уравнения в окрестности состояния равновесия описывается комплексным уравнением Гинзбурга-Ландау [Алешин и др., 2015]. Причем это уравнение не имеет устойчивых автономных периодических решений.

При дальнейшем увеличении τ характер поведения средней части распространяющейся волны резко меняется.

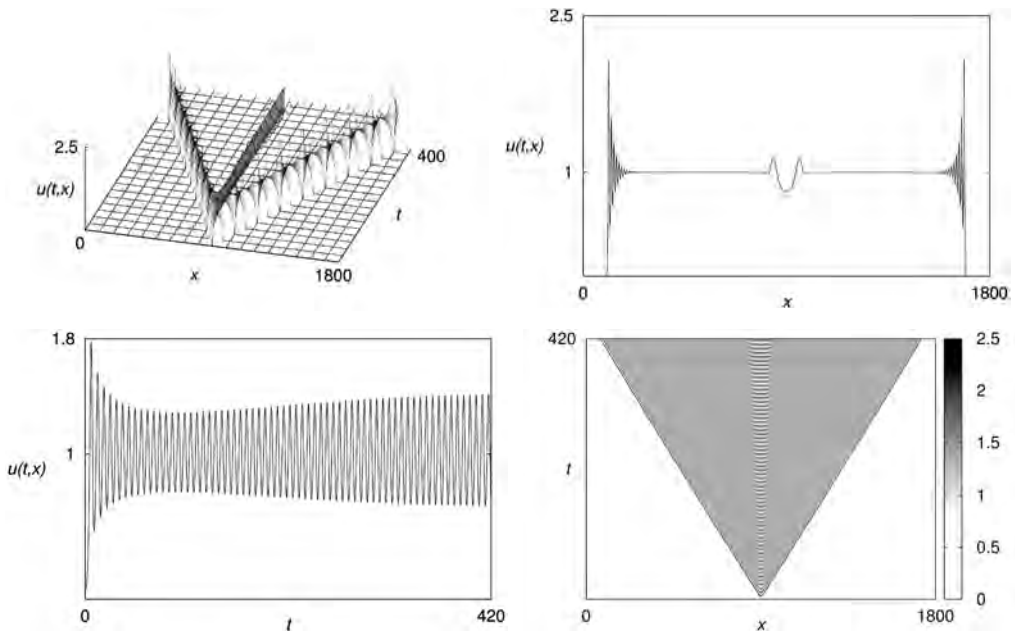


рис. 3. Решение системы (3) при $\tau = 1,6$. Слева сверху распространение волны на плоскости (x,t) . Справа сверху разрез при $t = 200$. Слева внизу разрез при $x = 900$. Справа снизу плотность распределения $u(t,x)$ в оттенках серого

Так на рисунке 4 при $\tau = 1,8$ мы можем наблюдать относительно медленное распространение колебательной структуры, находящейся в центральной части распространяющейся волны на протяжении от 0 до примерно 300. А на промежутке $t > 300$ распространение колебательной структуры имеет уже скорость близкую к скорости распространения фронта основной волны и равной двум. Общее представление о характере распространяющегося волнового фрон-

та можно получить из продольного и поперечного разреза, представленного на рисунке 4, а также трехмерной картины участка сложного поведения системы с границами $[400, 1400] \times [400, 420]$.

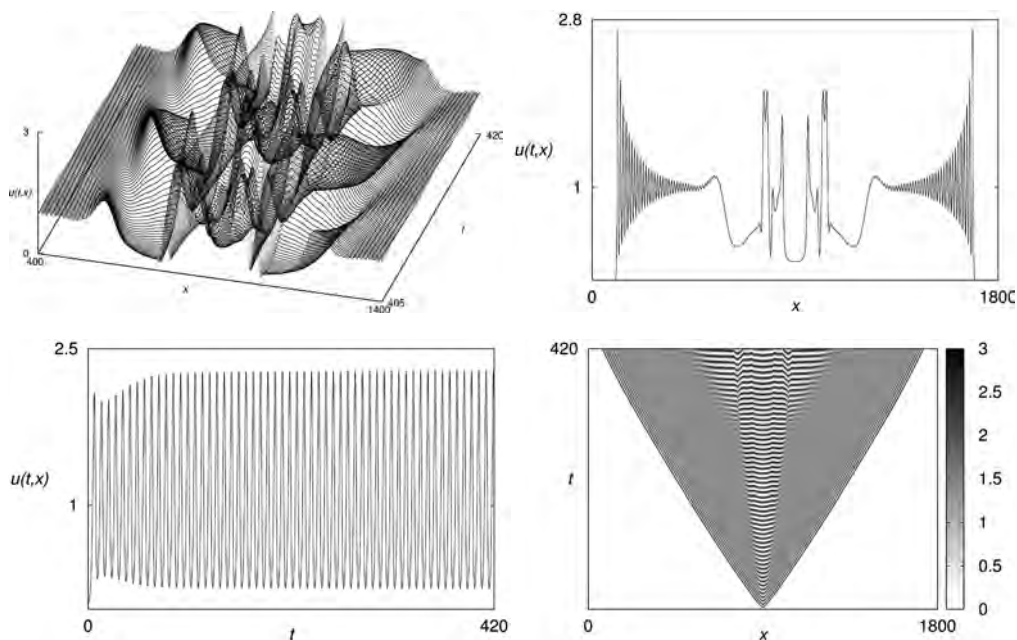


рис. 4. Решение системы (3) при $\tau = 1,8$. Слева сверху фрагмент ($x \in [400, 1400]$, $t \in [405, 420]$) графика распространения волны. Справа сверху разрез при $t = 200$. Слева внизу разрез при $x = 900$. Справа снизу плотность распределения $u(t, x)$ в оттенках серого

Обратим внимание на следующие особенности, вытекающие из анализа графиков. Нетрудно видеть, что у границы распространения основной волны имеется сходящийся к единице набор высокоамплитудных всплесков, которые потом переходят в сложное пространственно-неоднородное распространение решения в средней части волны. В отличие от предыдущих случаев здесь уже нет промежутков, на котором значение $u(t, x)$ сходится к единице. Рисунок 4 показывает сильную изрезанность пространственно-временного распределения функции $u(t, x)$.

При $\tau = 2$ наблюдается еще один новый эффект в распространении волны возмущения (рис. 5) для системы (3). В этом случае, так же как и ранее у границы волнового фронта, имеется некоторое число высокоамплитудных колебаний, которые при приближении к средней части профиля $u(t, x)$ сходятся не к единице, как ранее, а некоторому высокочастотному колебательному режиму, который разрушается только в средней части, где расположен след от начального возмущения.

Отметим также то обстоятельство, что структура решения сохраняется при внешних воздействиях. Так добавление разового единичного импульса на уча-

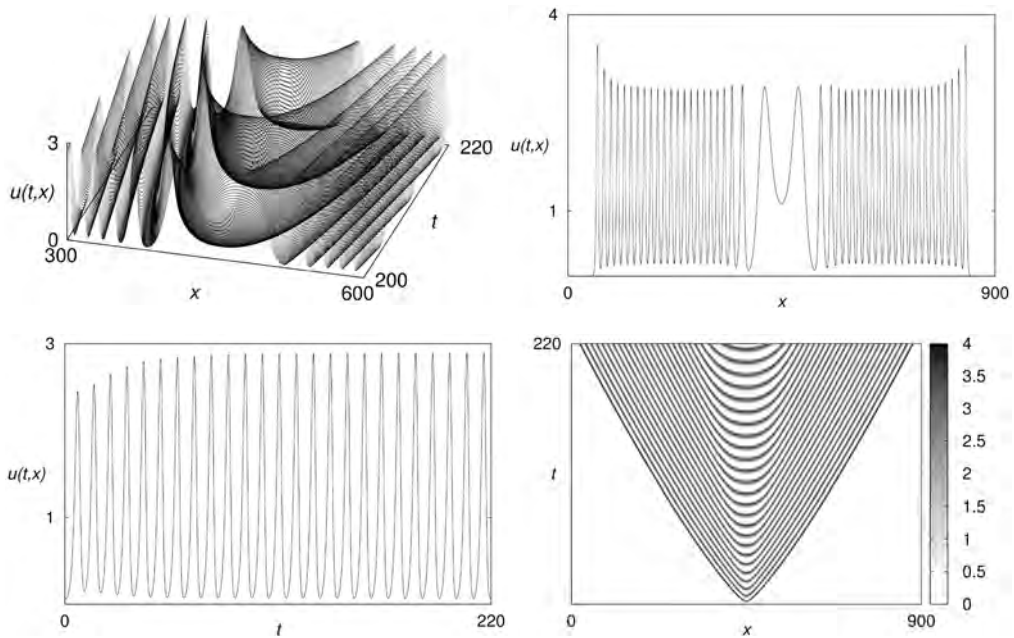


рис. 5. Решение системы (3) при $\tau = 2$. Слева сверху фрагмент ($x \in [300, 600]$, $t \in [200, 220]$) графика распространения волны. Справа сверху разрез при $t = 200$. Слева внизу разрез при $x = 900$. Справа снизу плотность распределения $u(t, x)$ в оттенках серого

сток единичной ширины, расположенный в центральной части изучаемой области не оказал существенного влияния (опыт проводился при $\tau = 1,6$ и $t = 200$). Через промежуток времени не более 10 единиц вид решения с внешним воздействием и без него существенно не отличались.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численный анализ процесса распространения волны позволил выделить четыре промежутка значений запаздывания. При достаточно малых значениях запаздывания данное уравнение имеет решения, близкие к решениям стандартного уравнения КПП. Увеличение параметра запаздывания приводит сначала к появлению затухающей колебательной составляющей в пространственном распределении решения. Дальнейший рост данного параметра приводит к разрушению бегущей волны. Это выражается в том, что в окрестности участка начального возмущения сохраняются незатухающие по времени и медленно распространяющиеся по пространству колебания, близкие к решениям соответствующей краевой задачи с периодическими граничными условиями. Наконец, если значение запаздывания достаточно велико, то во всей области распространения волны наблюдаются интенсивные пространственно-временные колебания.

Автор выражает благодарность Глызину С.Д. и Кащенко С.А. за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- [Алешин и др., 2015] *Алешин С.В., Глызин С.Д., Кащенко С.А.* Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 2. С. 304-321.
- [Глызин, 2009] *Глызин С.Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96-116.
- [Глызин и др., 2010] *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Конечномерные модели диффузионного хаоса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 5. С. 860-875.
- [Колмогоров и др., 1937] *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ, сер. Математика и механика 1 (6): 1-26, 1937.
- [Danilov et al., 1995] *Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov K.A.* Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes // Kluwer: Dordrecht, 1995.
- [Fisher, 1937] *Fisher R.A.* The Wave of Advantageous Genes // Ann. Eugenics 7, 355-369, 1937.
- [Glyzin, 2013] *Glyzin S.D.* Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. Vol. 47, No. 7. P. 452-469. DOI: 10.3103/S0146411613070031.
- [Hairer et al., 2008] *Hairer E., Wanner G., Norsett S.P.* Solving Ordinary Differential Equations 1 (Springer Series in Computational Mathematics): Nonstiff Problems // 2 ed., revised, Springer, 2008, 539 p.
- [Murray, 2001] *Murray J.D.* Mathematical Biology. I. An Introduction (Third Edition) // Berlin, 2001, 576 p.
- [Volpert et al., 2000] *Volpert A., Volpert V., Volpert V.* Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems // American Mathematical Society, 2000, 453 p.

THE SPATIALLY INHOMOGENEOUS SOLUTION IN THE FISHER-KOLMOGOROV EQUATION WITH DELAY

S.V. Aleshin

P.G. Demidov Yaroslavl State University

(P.G. Demidov YSU)

Science Center in Chernogolovka, Russian Academy of Sciences

We considered the problem of density wave propagation of logistic equation with delay and diffusion (Fisher-Kolmogorov equation with delay). We performed a numerical analysis of wave propagation and identified the values of delay which is characterized by the appearance of different spatially inhomogeneous regimes.

Keywords: Fisher-Kolmogorov equation, diffusion, delay, numerical analysis.