

# ИНВАРИАНТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АТТРАКТОРА И ДИФФУЗИОННЫЙ ХАОС В УРАВНЕНИИ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ С ГАНТЕЛЕОБРАЗНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ

*С. Д. Глызин*

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
(ЯрГУ им. П. Г. Демидова)  
Научный центр РАН в Черноголовке

Рассматривается феномен многомодового диффузионного хаоса, одним из признаков которого является увеличение ляпуновской размерности аттрактора распределённых эволюционных динамических систем при уменьшении коэффициента диффузии. Для иллюстрации этого эффекта рассматривается краевая задача типа «реакция-диффузия» в области, состоящей из двух прямоугольных частей, связанных между собой перемычкой. Ширину перемычки примем бифуркационным параметром задачи, она меняется так, что мера области сохраняется. Изучены условия возникновения хаотических колебаний и построена зависимость инвариантных характеристик аттрактора задачи от ширины перемычки. Параметр диффузии при этом выбран так, что за счёт уменьшения ширины перемычки может появиться пространственно неоднородный хаотический аттрактор. Для полученного аттрактора вычисляются ляпуновские экспоненты и ляпуновская размерность. Показано, что величина размерности при уменьшении параметра растёт до некоторого предела, кроме того выяснилось, что увеличение размерности связано с усложнением распределения по пространственной переменной устойчивых режимов системы.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

*Ключевые слова:* диффузионный хаос, аттрактор, ляпуновская размерность, уравнение Гинзбурга-Ландау, бифуркация.

## ВВЕДЕНИЕ

Формирование пространственно неоднородных структур в однородных средах обычно связано с изучением модельных краевых задач, имеющих общее название уравнения «реакция-диффузия». Данный феномен был впервые описан математически Аланом Тьюрингом в работе [Turing, 1952], посвящённой явлению диффузионной неустойчивости пространственно однородных решений. Теорема Тьюринга-Пригожина [Nicolis, Prigogine, 1977] описывает ситуацию, когда при определённом изменении диффузионного параметра системы пространственно однородное решение теряет устойчивость, а в его окрестности появляются устойчивые пространственно неоднородные режимы.

Рассмотрим параболическую краевую задачу вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u + F(u), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (1)$$

**Глызин** Сергей Дмитриевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей ЯрГУ, ведущий научный сотрудник ОПСи Научного центра в Черноголовке РАН, glyzin@uniyar.ac.ru

где  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $u \in \mathbb{R}^k$ ;  $k \geq 2$ ;  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_k\}$ ;  $d_j > 0$ ;  $j = 1, \dots, k$ ;  $\nu > 0$  — параметр, отвечающий за пропорциональное уменьшение коэффициентов диффузии;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к достаточно гладкой границе  $\partial\Omega$  ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ;  $m \geq 1$ ;  $F(u)$  — гладкая вектор-функция. Краевую задачу (1) принято называть системой «реакция-диффузия», она служит математической моделью многих биофизических и экологических процессов (см., напр., [Ахромеева и др., 2007; Мищенко и др., 2005; Nicolis, Prigogine, 1977]).

Под термином «диффузионный хаос» будем понимать странный аттрактор краевой задачи (1), нетривиально зависящий от пространственной переменной. В настоящее время существуют две концепции диффузионного хаоса — маломодовый и многомодовый хаос. Первый из них может возникать в системе (1) при «средних» значениях параметра  $\nu$ , а второй — при  $\nu \rightarrow 0$ .

Интерес к маломодовому хаосу инициирован известными работами Э. Лоренца [Lorenz, 1963], а также Д. Рюэля и Ф. Такенса [Ruelle, Takens, 1971], а затем Й. Курамото [Kuramoto, 1978], в которых был поставлен общий вопрос: можно ли связать стохастические режимы в распределённой системе, имеющей бесконечно много степеней свободы, с наличием странного аттрактора в системе небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. (Обычно эта система представляет собой каким-то образом упрощённую модель исходной системы.) В ряде случаев это действительно удаётся сделать. Для примера сошлёмся на известное уравнение Гинзбурга — Ландау, для которого сформулированный вопрос был решён в работах С. П. Курдюмова, Г. Г. Малинецкого и Т. С. Ахромеевой (см. обзор в книге [Ахромеева и др., 2007]) для некоторых типов краевых условий. Точнее говоря, в этих работах численными методами был обнаружен странный аттрактор в трёхмерной системе, получающейся из уравнения Гинзбурга — Ландау на отрезке с граничными условиями Неймана в результате двухмодовой галеркинской аппроксимации. Другой пример — анализ странных аттракторов простейших конечно-разностных аппроксимаций краевых задач вида (1) на отрезке (см. [Глызин, 1997]).

Многомодовый диффузионный хаос сначала был теоретически описан в статье [Колесов, 1988], посвящённой исследованию динамики нелинейных осцилляторов, слабо связанных через диффузию. Численный анализ данной модели проделан в работах автора [Глызин, 2009; 2013], из результатов которых вытекает важное следствие: если в системе (1) на отрезке при  $\nu \rightarrow 0$  наблюдается диффузионный хаос, то его ляпуновская размерность неограниченно растёт. Отметим также численный анализ уравнения Гинзбурга-Ландау, приведённый в работе [Гапонов-Грехов, 1987] для периодических краевых условий.

Для уточнения понятия многомодового диффузионного хаоса воспользуемся формулировками из статьи [Глызин и др., 2010]. Будем предполагать, что отвечающая системе (1) точечная модель, т. е. система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = F(u), \quad (2)$$

имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$u = u_0(t), \quad \frac{du_0}{dt} \neq 0 \quad (3)$$

некоторого периода  $T_0 > 0$ . Понятно, что такая ситуация является типичной. Учитывая, что цикл (3) сохраняется и в распределённой модели (1), для изучения его устойчивости линеаризуем уравнение из (1) на нём и применим к получившейся линейной краевой задаче метод Фурье по системе собственных функций оператора Лапласа. В результате приходим к системе

$$\dot{h} = [A_0(t) - zD]h, \quad (4)$$

где  $A_0(t) = F'(u)|_{u=u_0(t)}$ ; параметр  $z$  принимает дискретные значения  $v\lambda_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ;  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  — занумерованные в порядке возрастания собственные значения оператора  $-\Delta$  в области  $\Omega$  с граничными условиями Неймана. Всюду ниже для удобства будем считать параметр  $z$  в (4) непрерывно меняющимся на полуоси  $z \geq 0$ . Обозначим, далее, через  $\mu_s$ ,  $s = 1, \dots, k$ , мультипликаторы системы (4) и положим

$$\alpha(z) = \max_{1 \leq s \leq k} \left\{ \frac{1}{T_0} \operatorname{Re} \ln \mu_s(z) \right\}. \quad (5)$$

Заметим, что  $\alpha(0) = 0$ , так как при  $z = 0$  система (4) (в силу экспоненциальной устойчивости цикла (3) для точечной модели (2)) имеет простой единичный мультипликатор, которому отвечает решение Флоке  $h = \dot{u}_0(t)$ , а все остальные её мультипликаторы лежат в круге  $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < 1\}$ .

В дальнейшем нам потребуется следующее определение, введённое в статье [Глызин и др., 2010]. Следует отметить, что аналог данного определения впервые был введён в работе [Колесов, 1985].

**Определение.** Будем говорить, что параболическая краевая задача (1) имеет многомодовый диффузионный аттрактор, если выполняются следующие ограничения:

- а) точечная модель (2) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл (3);
- б) найдутся такие  $0 \leq z_1 < z_2$ , что функция (5) строго положительна на интервале  $z_1 < z < z_2$ ;
- в) при всех достаточно малых  $v > 0$  динамическая система, порождаемая краевой задачей (1) в фазовом пространстве  $C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^k)$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , имеет хаотический аттрактор  $A_v$ , ляпуновская размерность  $d_L(A_v)$  которого стремится к  $+\infty$  при  $v \rightarrow 0$ .

Как уже отмечалось выше, условие а) типично для краевых задач вида (1), возникающих в различных биофизических и экологических приложениях. Требование  $\alpha(z) > 0$  при  $z \in (z_1, z_2)$ , фигурирующее в условии б), обеспечивает неустойчивость цикла (3) в рамках распределённой модели (1) при всех достаточно малых значениях параметра  $v$ . Что же касается условия в), являющегося самым главным из всех трёх, то оно гарантирует реализуемость при  $v \rightarrow 0$  феномена многомодового диффузионного хаоса. Учитывая, что термин «хаотический аттрактор» допускает различные интерпретации, будем для определённости придерживаться понятия хаоса, предложенного в работе [Колесов, Розов, 2009]. Отметим, что упомянутую в условии в) ляпуновскую размерность  $d_L(A_v)$  будем вычислять через характеристические показатели аттрактора  $A_v$  по известной формуле Каплана-Йорке [Frederickson et al., 1983].

Опираясь на приведённое определение, в статье [Глызин и др., 2010] сформулирована концепция диффузионного хаоса, заключающаяся в установлении самого факта существования динамических систем с многомодовым диффузионным аттрактором (см. [Глызин и др., 2010], а также [Глызин, 2013], где собраны несколько примеров многомодового диффузионного хаоса). Численное обоснование данного явления нетрудно получить для простых областей, например, как в упомянутой выше работе для отрезка. В случае плоских невыпуклых областей ситуация существенно сложнее. В данной работе рассматривается задача об устойчивых режимах динамической системы типа «реакция-диффузия» в ситуации, когда при сохранении меры области определения меняется её граница. В частности, подробно рассмотрен случай гантелеобразной области. Краевые задачи параболического типа в такой области были рассмотрены ранее в статьях Хосе Арриета [Arrieta, 1995a, b] и серии более поздних его статей с соавторами [Arrieta et al., 2006; 2009]. В этих публикациях, однако, ставилась несколько иная задача, заключавшаяся в исследовании ситуации, когда ширина перемычки, соединяющей области, стремится к нулю.

С целью более осмысленного подбора параметров задачи сделаем некоторые дополнительные предположения. В первую очередь, область определения пространственной переменной для простоты выберем в виде двух прямоугольных частей, связанных между собой перемычкой. Ширина перемычки примем бифуркационным параметром задачи, причём максимальное значение этого параметра соответствует исходной прямоугольной области. Далее, предполагается, что параметры точечной (не зависящая от пространственной переменной) системы находятся вблизи бифуркации Андронова-Хопфа и, тем самым, задача имеет пространственно однородный цикл. Следующее предположение состоит в том, что в задаче возможна диффузионная потеря устойчивости однородного цикла и параметр диффузии для указанной выше прямоугольной области выбран вблизи, но больше критического значения параметра диффузии.

Таким образом, основная решаемая в работе задача состоит в выяснении, при каком значении ширины перемычки пространственно однородный режим теряет устойчивость и какие при этом появляются устойчивые режимы.

В случае появления неупорядоченных колебаний численно определяется набор инвариантных числовых характеристик аттрактора (ляпуновских экспонент) с тем, чтобы по ним судить о сложности бифурцирующих пространственно неоднородных режимов.

Одним из основных результатов, полученных на этом пути, является тот факт, что увеличение ляпуновской размерности аттрактора тесно связано с усложнением пространственного распределения аттрактора. Иначе говоря, в более сложном случае имеется более изрезанный профиль распределения переменных по пространственной области, что позволяет и в данной ситуации говорить о многомодовом диффузионном хаосе.

## ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Рассмотрим краевую задачу (1) в ситуации, когда соответствующая ей точечная задача близка к бифуркации Андронова-Хопфа:

$$\dot{u} = \varepsilon \nu D \Delta u + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + F_*(u), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (6)$$

как и выше,  $u = u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  — положительный малый параметр,  $k \times k$  матрица  $A_0$  имеет пару собственных чисел на мнимой оси  $\pm i\omega$ , причём все остальные собственные числа данной матрицы лежат в левой комплексной полуплоскости,  $k \times k$  матрица  $A_1$  такова, что собственные числа матрицы  $A_0 + \varepsilon A_1$  переходят в правую комплексную полуплоскость при  $\varepsilon > 0$ . Вектор-функции векторного аргумента  $F_2(u, u)$ ,  $F_3(u, u, u)$  линейны по каждому аргументу, гладкая функция  $F_*(u)$  имеет порядок малости по  $u$  выше третьего. Введём собственный вектор  $a$ , соответствующий собственному числу  $i\omega$  так, что  $(A_0 - i\omega E)a = 0$ , в свою очередь собственный вектор сопряжённой задачи  $(A_0^T + i\omega E)b = 0$  выберем при дополнительном условии  $(a, b) = 1$ , где  $(*, *)$  — скалярное произведение в унитарном пространстве.

Хорошо известно, что система (6) с помощью замены

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} (\xi(s, x) \exp(i\omega t) \cdot a + \bar{\xi}(s, x) \exp(-i\omega t) \cdot \bar{a}) + \varepsilon u_2(s, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(s, x) + \dots, \quad (7)$$

где  $s = \varepsilon t$ , в результате приравнивания коэффициентов при степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  на третьем шаге приводится к укороченной квазинормальной форме (см. [Васильева и др., 1985]):

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \nu(Da, b)\Delta \xi + (A_1 a, b)\xi + d|\xi|^2 \xi, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (8)$$

где  $d = d_0 + ic_0$  — первая ляпуновская величина, определяемая нелинейностью задачи. Нетрудно найти

$$d_0 + ic_0 = \left\{ \begin{aligned} &F_2(a, w_0) + F_2(w_0, a) + F_2(\bar{a}, w_1) + F_2(w_1, \bar{a}) + \\ &+ F_3(a, a, \bar{a}) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(\bar{a}, a, a), b \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где  $w_0 = -A_0^{-1}(F_2(\bar{a}, a) + F_2(a, \bar{a}))$ ;  $w_1 = (2i\omega - A_0)^{-1}F_2(a, a)$ .

Основное предположение, принимаемое на этом этапе, состоит в том, что  $d_0 < 0$ . Учтём, кроме того, что собственные числа матрицы  $A_0 + \varepsilon A_1$  переходят при  $\varepsilon > 0$  в правую комплексную полуплоскость, что гарантирует положительность величины  $\text{Re}(A_1 a, b)$ . В этой ситуации, выполняя в системе (8) замены  $\xi = \eta \sqrt{-\text{Re}(A_1 a, b)/d_0} \cdot \exp(\text{Im}(A_1 a, b)s)$ ,  $\tau = \text{Re}(A_1 a, b)s$ , получим уравнение Гинзбурга-Ландау вида

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \nu(1 - ic_1)\Delta \eta + \eta - (1 + ic_2)|\eta|^2 \eta, \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (10)$$

где  $\nu \text{Re}(Da, b)/\text{Re}(A_1 a, b)$  снова обозначено  $\nu$ ;  $c_1 = -\text{Im}(Da, b)/(\text{Re}(A_1 a, b) \times \text{Re}(Da, b))$ ;  $c_2 = -c_0/d_0$ . Относительно уравнения (10) известно, что его грубым режимам соответствуют, при достаточно малых  $\varepsilon$ , грубые режимы исходной системы (6) той же устойчивости [Васильева и др., 1985].

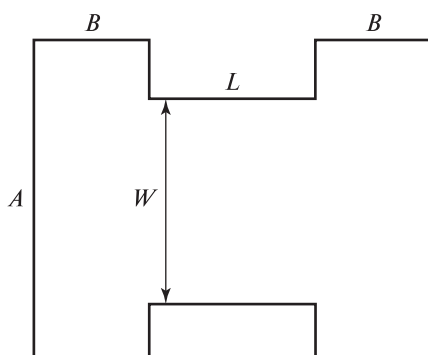


Рис. 1. Область определения  $\Omega$

Уравнение (10) имеет однородный цикл

$$\eta = \exp(-ic_2\tau + i\alpha), \quad \alpha = \text{const.} \quad (11)$$

В точечной модели (в отсутствие диффузионного слагаемого) цикл (11) является орбитально асимптотически устойчивым. Исследование устойчивости этого цикла для задачи (10) ( $\nu \neq 0$ ) даёт следующее условие: цикл (11) устойчив (неустойчив) в рамках краевой задачи (10) при  $\nu - \nu_* > 0$  ( $< 0$ ), где

$$\nu_* = \frac{2(c_1c_2 - 1)}{\lambda_1(1 + c_1^2)} > 0, \quad (12)$$

Учитывая положительность параметра  $\nu$  и положительность величины  $\lambda_1$ , из соотношения (12) следует, что для появления диффузионной неустойчивости цикла необходимо выполнение условия

$$c_1c_2 > 1. \quad (13)$$

Предпринятый анализ позволяет уточнить постановку задачи для численного эксперимента. Рассмотрим уравнение Гинзбурга-Ландау (10) в области  $\Omega$  (рис. 1). Будем считать, что недеформированная область  $\Omega$  представляет собой квадрат со стороной единица. Зафиксируем параметры  $c_1 = 0,5$ ,  $c_2 = 8$  так, что выполнено неравенство (13).

В этой ситуации величина  $\lambda_1 = -\pi^2$  и, тем самым, критическое значение  $\nu$ , вычисленное по формуле (12), даёт  $\nu_* = 6/(\pi^2 \cdot 1,25) \approx 0,4863$ . Выберем  $\nu = 2$ , заведомо превосходящим порог  $\nu_*$ , и рассмотрим процесс потери устойчивости однородного цикла при уменьшении ширины полосы, связывающей прямоугольники в  $\Omega$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО СЧЁТА

Предположим, что у краевой задачи (10) величина  $\nu$  относительно мала, однако больше, чем критическое значение  $\nu_*$ , при котором однородный цикл теряет устойчивость. Выберем область определения пространственной переменной  $\Omega$  в виде двух соединённых перемычкой прямоугольников (см. рис. 1).

Будем считать, что прямоугольники имеют фиксированную длину  $A$  и ширину  $B$ , а перемычка имеет длину  $L$  и ширину  $W$ . Теперь будем уменьшать  $W$  и, соответственно, увеличивать  $L$  таким образом, чтобы произведение  $LW$  оставалось неизменным. Рассмотрим характер потери устойчивости однородного цикла при указанном изменении  $\Omega$  и определим инвариантные числовые характеристики возникающих при этом аттракторов задачи.

Для численной оценки решений краевой задачи (10) будем использовать разностные аппроксимации по пространственным переменным. Построим разностную модель, аппроксимирующую (10), для этого отнесём начало координат на плоскости изменения пространственной переменной в левый нижний угол области  $\Omega$ , затем разобьём область  $\Omega$  на прямоугольники размером не более чем  $\delta x \times \delta y$ , где  $\delta x = A/N$ ,  $\delta y = (L + 2B)/M$ . Далее, узлами сетки будем считать точки  $(x_i, y_j)$  с координатами  $x_i = (i - 0,5)\delta x$ ,  $y_j = (j - 0,5)\delta y$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ ,  $j = 1, \dots, M - 1$ . Для точек  $(x_i, y_j) \in \Omega$ , вместо краевой задачи (10), заменяя оператор Лапласа его разностным аналогом, выпишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \eta_{i,j}}{\partial \tau} = v(1 - ic_1) \left( \frac{\eta_{i-1,j} + \eta_{i+1,j} - 2\eta_{i,j}}{(\delta x)^2} + \frac{\eta_{i,j-1} + \eta_{i,j+1} - 2\eta_{i,j}}{(\delta y)^2} \right) + \eta_{i,j} - (1 + ic_2) |\eta_{i,j}|^2 \eta_{i,j}, \quad (14)$$

где  $(i, j) \in \text{Ind}$ , а множество индексов  $\text{Ind}$  определяется следующим образом:

$$\text{Ind} = \{(i, j) \mid i \in \{1, \dots, N - 1\}, j \in \{1, \dots, M - 1\}, (x_i, y_j)\} \in \Omega. \quad (15)$$

Граничные условия непроницаемости моделируются стандартным образом: на внешней границе области  $\Omega$  считаем, что

$$\left. \begin{aligned} \eta_{0,j} &= \eta_{1,j}, & \eta_{N,j} &= \eta_{N-1,j}, & j &= 1, \dots, M - 1, \\ \eta_{i,0} &= \eta_{i,1} \left( (x_i, y_1) \in \Omega \right), & \eta_{i,M} &= \eta_{i,M-1} \left( (x_i, y_{M-1}) \in \Omega \right), & i &= 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

На границе перемычки и на границах прямоугольников, к ней примыкающих, приблизим краевые условия по аналогии с (16), учитывая с помощью линейных аппроксимаций тот факт, что граница проходит не посередине расстояния между узловыми точками. Получившуюся систему обыкновенных дифференциальных уравнений будем решать методами Дормана-Принса 8(5) порядка (см. [Dormand, Prince, 1980]).

Поведение решений системы (14) с уменьшением ширины перемычки довольно быстро усложняется, поэтому возникает потребность в вычислении некоторых инвариантных характеристик аттрактора задачи, определяющих его хаотичность. Алгоритм определения спектра ляпуновских экспонент и ляпуновской размерности базируется на известной мультипликативной эргодической теореме Оселедца [Оселедец, 1968], согласно которой для конечномерной динамической системы величина старшего ляпуновского показателя не зависит от начальной точки на аттракторе (точнее говоря, он одинаков для почти всех начальных значений по некоторой инвариантной мере). В нашем случае бесконечномерная задача (10) заменена конечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (14) и их ляпуновские экспоненты могут, вообще говоря, не совпадать. В связи с этим дополнительный интерес представляет вопрос об адекватности модели (14).

Для вычисления ляпуновских экспонент системы (14) будем пользоваться методом Беннетина [Benettin et al., 1976; Wolf et al., 1985] (точнее, его вариантом, изложенным в работе [Глызин и др., 2005]). Для оценки ляпуновской размерности будем пользоваться формулами Каплана-Йорке (см. [Frederickson et al., 1983]).

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Перейдём к описанию численного эксперимента, относящегося к одному из основных результатов статьи. Вычисления для краевой задачи (10) в области  $\Omega$  выполнялись при следующих значениях параметров:  $c_1 = 0,5$ ,  $c_2 = 8$ ,  $\nu = 2$ , выбор которых обоснован выше. Размеры области  $\Omega$  предполагались равными  $A = 1$ ,  $B = 1/3$ , площадь перемычки при этом не меняется ( $LW = 1/3$ ), а параметры разбиения принимались равными  $N = 200$ ,  $M = 200$ . Введём бифуркационный параметр

$$\mu = \frac{W}{A}. \tag{17}$$

Система (14)–(16) решалась численно при различных  $\mu$  в промежутке от 1 до 0,2. Нижняя граница  $\mu = 0,2$  выбрана из соображений сохранения точности применяемой разностной схемы.

Выполненные расчёты показали, что при уменьшении  $\mu$  на промежутке от 1 до 0,62 остаётся устойчивым пространственно однородный цикл. Иллюстрацией этому служит рис. 2а, на котором изображена проекция фазовой кривой устойчивого режима системы (14) на плоскость ( $\text{Re } \eta_{5,5}$ ,  $\text{Re } \eta_{150,55}$ ). Близость кривой к биссектрисе первого координатного угла как раз и означает, что колебания в различных точках области  $\Omega$  синхронизированы. При  $\mu \approx 0,62$  пространственно однородный цикл мягко теряет устойчивость, при этом рождается пространственно неоднородный цикл. Значение  $\mu \approx 0,6$  является следующим критическим, поскольку при  $\mu < 0,6$  колебательные режимы, устанавливающиеся в системе (14), становятся неупорядоченными.

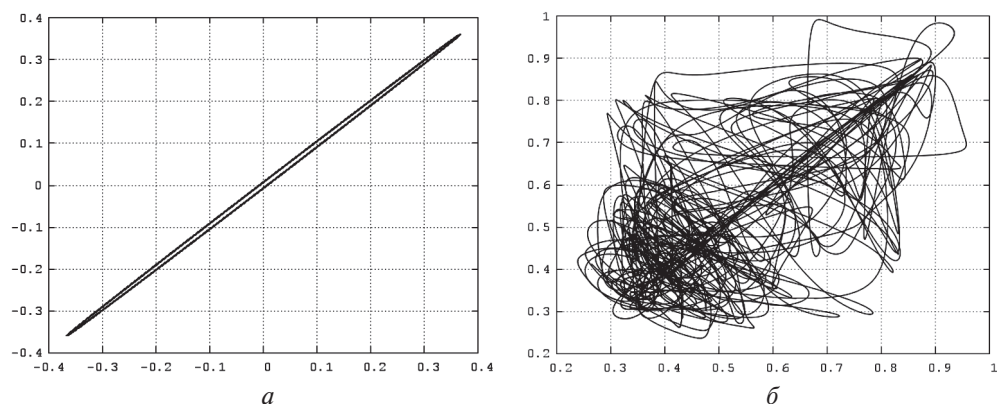


Рис. 2. Проекция фазового портрета системы (14): а —  $\mu = 0,62$ , пространственно однородный цикл; б —  $\mu = 0,59$ , пространственно неоднородный цикл



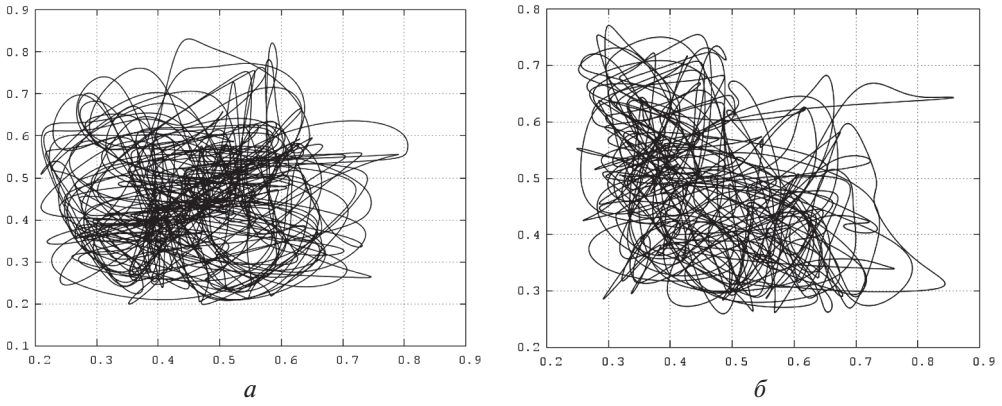


Рис. 3. Проекция фазовых портретов решений системы (14): а —  $\mu = 0,45$ ; б  $\mu = 0,22$

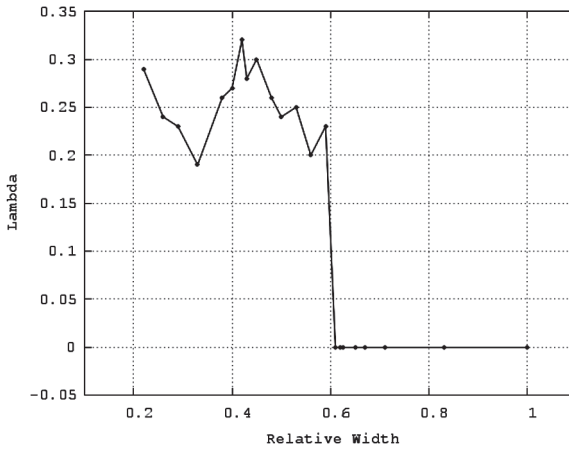


Рис. 4. График зависимости старшего ляпуновского показателя  $\lambda_1(\mu)$  аттрактора системы (14) от относительной толщины перемычки  $\mu$

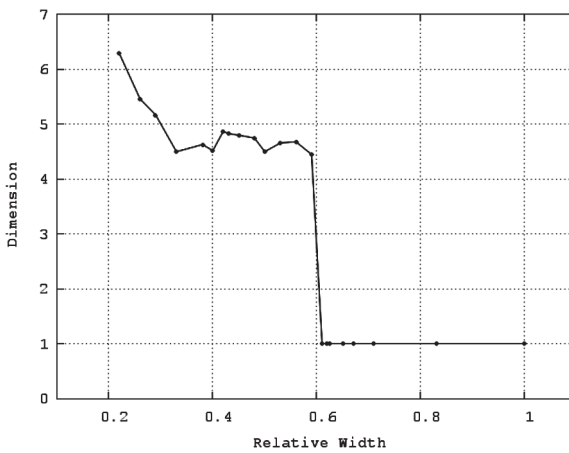
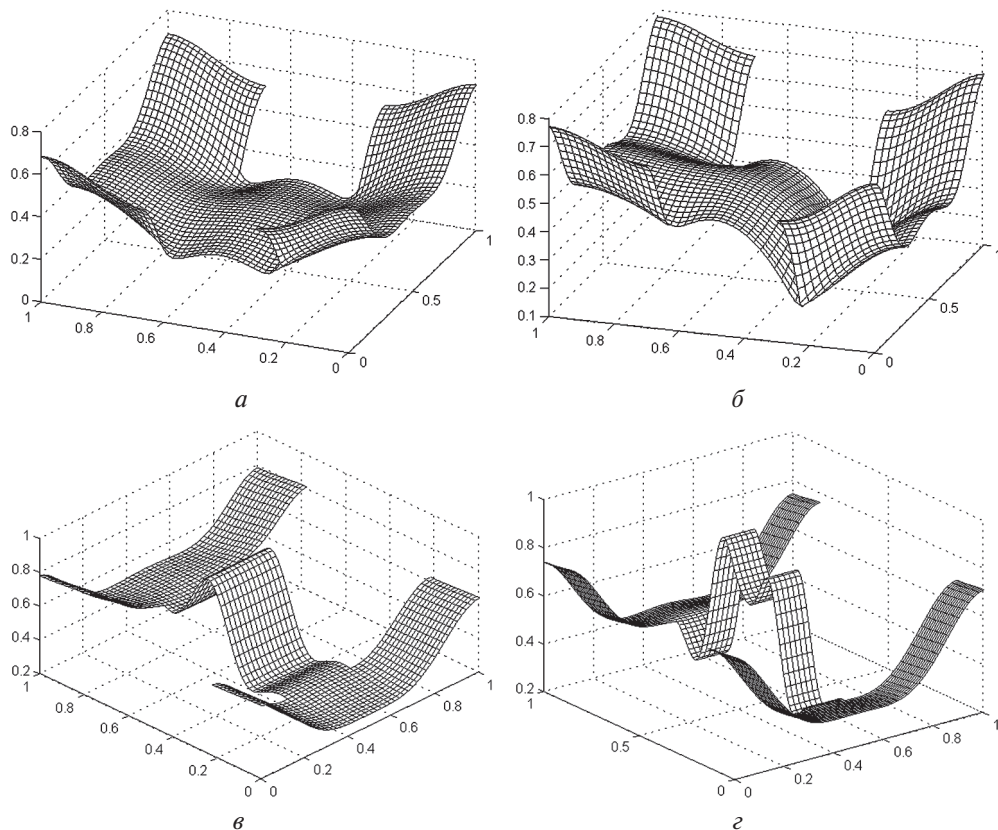


Рис. 5. График зависимости ляпуновской размерности  $d_L(\mu)$  аттрактора системы (14) от относительной толщины перемычки  $\mu$



**Рис. 6.** Пространственное распределение амплитуды решения системы (14) при различных значениях относительной толщины перемычки и фиксированном  $t$ :  $a$  —  $\mu = 0,61$ ;  $б$  —  $\mu = 0,59$ ;  $в$  —  $\mu = 0,38$ ;  $г$  —  $\mu = 0,22$

При значениях, близких к  $\mu = 0,6$  (рис. 2б, построенный для  $\mu = 0,59$ ), колебательный режим устроен так, что на протяжении длительных промежутков времени значения в различных точках области синхронизированы, это приводит к тому, что на указанном рисунке в окрестности биссектрисы первого координатного угла наблюдается уплотнение траекторий системы.

Дальнейшее уменьшение  $\mu$  приводит к усложнению колебательных режимов (рис. 3). Степень их сложности находит своё отражение в построенных для аттрактора системы (14) графиках зависимости от  $\mu$  старшего ляпуновского показателя  $\lambda_1$  и ляпуновской размерности  $d_L$ . Нетрудно видеть (рис. 4, 5), что после возникновения при  $\mu < 0,6$  у системы хаотического аттрактора величина  $\lambda_1(\mu)$  колеблется в относительно узких пределах, а значение  $d_L(\mu)$  после промежутка от  $\mu \approx 0,6$  до  $\mu \approx 0,32$ , где оно почти не меняется, при  $\mu < 0,32$  растёт.

Усложнение аттрактора системы можно проиллюстрировать и с помощью графиков пространственного распределения амплитуды решения системы (14) при различных значениях относительной толщины перемычки и фиксированном  $t$ . На рис. 6 в узлах решётки области  $\Omega$  построены величины

$|\eta_{i,j}(t)|$ , где  $(i, j) \in \text{Ind}$ . Нетрудно видеть, что режимы, получающиеся при малых  $\mu$  (см. рис. 6в, г, построенные при  $\mu = 0,33$  и  $\mu = 0,22$  соответственно), оказываются существенно более изрезанными по сравнению с режимами, возникающими при значениях  $\mu$ , близких к критическому значению, при котором теряет устойчивость пространственно однородный цикл (см. рис. 6а, б, построенные при  $\mu = 0,61$  и  $\mu = 0,59$  соответственно).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, следует отметить, что исследуемое уравнение Гинзбурга-Ландау (10) может обладать многомодовым хаотическим аттрактором не только за счёт уменьшения коэффициента диффузии, но и в результате изменения геометрии области определения пространственной переменной. Один из основных результатов численного анализа состоит в том, что увеличение ляпуновской размерности аттрактора тесно связано с усложнением его пространственного распределения. Это означает, что в более сложном случае имеется более изрезанный профиль распределения переменных по пространственной области, что позволяет говорить о многомодовом диффузионном хаосе.

Задача о многомодовом диффузионном хаосе и его инвариантных характеристиках пока ещё далека от полного решения. Поставленную в статье задачу необходимо решать в более сложных областях и при меньших значениях параметра диффузии. Это потребует, с одной стороны, сеток с большим числом узлов для адекватного представления аттрактора со сложным пространственным распределением, и с другой, вычисления большего числа ляпуновских экспонент для оценки ляпуновской размерности. На этом пути необходимо использовать широкие возможности, открывающиеся в результате применения гибридных параллельных вычислительных систем.

## ЛИТЕРАТУРА

- [Ахромеева и др., 2007] *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. М.: Физматлит, 2007.
- [Васильева и др., 1986] *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Математический сборник. 1986. Т. 130(172). № 4(8). С. 488–499.
- [Гапонов-Грехов, Рабинович, 1987] *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 7–44.
- [Глызин и др., 2005] *Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 268–273.
- [Глызин, 1997] *Глызин С. Д.* Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи «реакция-диффузия» // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 6. С. 805–811.

- [Глызин, 2009] *Глызин С. Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16. № 3. С. 96–116.
- [Глызин и др., 2010] *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Конечномерные модели диффузионного хаоса // Журн. вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 5. С. 860–875.
- [Глызин, 2013] *Глызин С. Д.* Размерностные характеристики диффузионного хаоса // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20. № 1. С. 30–51.
- [Колесов, 1988] *Колесов А. Ю.* Описание фазовой неустойчивости системы гармонических осцилляторов, слабо связанных через диффузию // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 1. С. 831–835.
- [Колесов, Розов, 2009] *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* К вопросу об определении хаоса // Успехи математических наук. 2009. Т. 64. Вып. 4(388). С. 125–172.
- [Колесов, 1985] *Колесов Ю. С.* Проблема адекватности экологических уравнений. Ярославль, 1985. Деп. ВИНТИ. 1985. № 1901-85.
- [Мищенко и др., 2005] *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.
- [Оседедец, 1968] *Оседедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. мат. об-ва. Т. 19. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. С. 179–210.
- [Arrieta, 1995a] *Arrieta J. M.* Neumann eigenvalue problems on exterior perturbations of the domain // J. Differential Equations. 1995. V. 118. N. 1. P. 54–103.
- [Arrieta, 1995b] *Arrieta J. M.* Rates of Eigenvalues on a Dumbbell Domain. Simple Eigenvalue Case // Trans. American Mathematical Society. 1995. V. 347. N. 9. P. 3503–3531.
- [Arrieta et al., 2006] *Arrieta J. M., Carvalho A. N., Lozada-Cruz G.* Dynamics in dumbbell domains I. Continuity of the set of equilibria // J. Differential Equations. 2006. V. 231. N. 2. P. 551–597.
- [Arrieta et al., 2009] *Arrieta J. M., Carvalho A. N., Lozada-Cruz G.* Dynamics in dumbbell domains II. The limiting problem // J. Differential Equations. 2009. V. 247. N. 1. P. 174–202.
- [Benettin et al., 1976] *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments // Physical Review. 1976. V. A14. P. 2338–2345.
- [Dormand, Prince, 1980] *Dormand J. R., Prince P. J.* A Family of Embedded Runge — Kutta Formulae // J. Computational and Applied Mathematics. 1980. V. 6. P. 19–26.
- [Frederickson et al., 1983] *Frederickson P., Kaplan J., Yorke J.* The Lyapunov dimension of strange attractors // J. Differential Equations. 1983. V. 49. N. 2. P. 185–207.
- [Kuramoto, 1978] *Kuramoto Y.* Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems // Progress of Theoretical Physics Supplement. 1978. N. 64(1978). P. 346–367.
- [Lorenz, 1963] *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmospheric Sciences (JAS). 1963. V. 20. P. 130–141.
- [Nicolis, Prigogine, 1977] *Nicolis G., Prigogine I.* Self-Organization in Non-Equilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations. Wiley, 1977. 512 p.
- [Ruelle, Takens, 1971] *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Communications in Mathematical Physics. 1971. V. 20. P. 167–192.
- [Turing, 1952] *Turing A. M.* The Chemical Basis of Morphogenesis // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences. 1952. V. 237. N. 641. P. 37–72.
- [Wolf et al., 1985] *Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. V. D16. P. 285–317.

## INVARIANT DIMENSIONAL CHARACTERISTICS OF ATTRACTOR AND DIFFUSION CHAOS IN GINZBURG-LANDAU EQUATION WITH THE DUMBBELL DOMAIN

*S. Glyzin*

P.G. Demidov Yaroslavl State University (P.G. Demidov YSU)  
Science Center in Chernogolovka, Russian Academy of Sciences

The phenomenon of multimode diffusion chaos is considered. For a number of examples it is shown, that the Lyapunov dimension of the attractor of a distributed dynamical system increases as the diffusion coefficient tends to 0. Then we consider a boundary problem of reaction-diffusion type in the domain consisting of two rectangular areas connected by a bridge. The bridge width is a bifurcation parameter of the problem and is changed in such way that the measure of the domain is preserved. The conditions on chaotic oscillations emergence were studied and the dependence of invariant characteristics of the attractor on the bridge width was constructed. By decreasing the bridge width the homogeneous cycle loses stability and then the spatially inhomogeneous chaotic attractor emerges. For the obtained attractor we compute Lyapunov exponents and Lyapunov dimension and notice that the dimension grows as the parameter decreases but is bounded. We show that the dimension growth is connected with the growing complexity of stable solutions distribution with respect to the space variable.

*Keywords:* diffusion chaos, attractor, Lyapunov dimension, Ginzburg-Landau equation, bifurcation

---

**Glyzin** Sergey — doctor of physical and mathematical sciences, professor, YSU, Leading Researcher at Scientific Center in Chernogolovka RAS . glyzin@uniyar.ac.ru