

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926.4

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ДВУХКЛАСТЕРНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В ПОЛНОСВЯЗНЫХ ГЕННЫХ СЕТЯХ

© 2016 г. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Рассматриваются нелинейные системы дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием, являющиеся математическими моделями искусственных полносвязных генных сетей. Исследуются вопросы существования и устойчивости в этих системах специальных периодических движений, так называемых режимов двухкластерной синхронизации.

DOI: 10.1134/S03740641160

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для описания интересующей нас математической модели осцилляторной генной сети обратимся сначала к изолированному гену-авторепрессору. Согласно работам [1, 2], изменение во времени концентрации  $u = u(t)$  соответствующего ему белка происходит по закону

$$\dot{u} = -u + \frac{\alpha}{1 + u^\gamma(t-h)}, \quad (1.1)$$

где  $\alpha, \gamma, h$  – положительные константы. Далее, предположим, что имеется  $m$ ,  $m \geq 2$ , таких генов, связанных между собой по принципу “каждый со всеми”. В результате приходим к системе

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + u_j^\gamma(t-h)} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \frac{\beta}{1 + u_s^\gamma(t-h)}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.2)$$

где параметры  $\alpha, \beta, \gamma, h$  положительны. Следует отметить, что система (1.2), являющаяся обобщением модели (1.1), заведомо попадает в один из известных классов генных сетей, введенных в работах [1–3].

В настоящей работе вопрос об аттракторах системы (1.2) исследуется в случае, когда параметр  $\gamma$  велик, а остальные параметры имеют порядок единицы. Точнее говоря, всюду ниже предполагаем, что

$$\gamma = 1/\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \beta > \alpha > 1, \quad (1.3)$$

а запаздывание  $h > 0$  пока произвольно (ограничения на него будут наложены ниже). Далее, выполним в системе (1.2) замены переменных  $u_j = \exp x_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . В результате с учетом соотношений (1.3) она принимает вид

$$\dot{x}_j = -1 + \exp(-x_j) \left( \frac{\alpha}{\Omega(x_j(t-h), \varepsilon)} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \frac{\beta}{\Omega(x_s(t-h), \varepsilon)} \right), \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.4)$$

где  $\Omega(y, \varepsilon) = 1 + \exp(y/\varepsilon)$ .

Не претендуя на полноту анализа, ввиду сложности системы (1.4) ограничимся изучением специальных ее периодических решений, так называемых режимов двухкластерной синхронизации.

Для описания упомянутых режимов зафиксируем произвольно натуральное  $k$ ,  $1 \leq k \leq m-1$ , и предположим, что совокупность индексов  $1 \leq j \leq m$  разбита на два непересекающихся множества  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , состоящие из  $k$  и  $m-k$  элементов соответственно, т.е.

$$\{1, 2, \dots, m\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}. \quad (1.5)$$

Тогда, очевидно, система (1.4) допускает решения с компонентами

$$x_j = v(t) \quad \text{при } j \in \mathcal{A}, \quad x_j = w(t) \quad \text{при } j \in \mathcal{B}, \quad (1.6)$$

где переменные  $v$ ,  $w$  удовлетворяют вспомогательной системе

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -1 + \exp(-v) \left( \frac{\alpha_k}{\Omega(v(t-h), \varepsilon)} + \frac{\beta_{m-k}}{\Omega(w(t-h), \varepsilon)} \right), \\ \dot{w} &= -1 + \exp(-w) \left( \frac{\alpha_{m-k}}{\Omega(w(t-h), \varepsilon)} + \frac{\beta_k}{\Omega(v(t-h), \varepsilon)} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

в которой  $\alpha_s = \alpha + (s-1)\beta$ ,  $\beta_s = s\beta$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Если же в свою очередь система (1.7) имеет неоднородное периодическое решение (для которого  $v(t) \not\equiv w(t)$ ), то отвечающее ему решение (1.6) исходной системы (1.4) назовем периодическим режимом двухкластерной синхронизации.

Итак, вопрос существования режимов двухкластерной синхронизации сводится к отысканию неоднородных периодических решений системы (1.7). Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** Пусть натуральное число  $k$ ,  $1 \leq k \leq m-1$ , произвольно фиксировано, параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  удовлетворяют условию из (1.3), а для запаздывания  $h$  выполняется оценка

$$h < \ln(\beta_k/\alpha_k). \quad (1.8)$$

Тогда найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_k > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_k$  система (1.7) допускает экспоненциально орбитально устойчивый неоднородный цикл

$$C_k : (v, w) = (v_k(t, \varepsilon), w_k(t, \varepsilon)), \quad (1.9)$$

компонента  $v_k(t, \varepsilon)$  которого знакопеременна, а компонента  $w_k(t, \varepsilon)$  строго положительна.

Цикл  $C_k$  порождает целое семейство периодических режимов двухкластерной синхронизации, задающихся равенствами (1.5), (1.6), в которых

$$v(t) = v_k(t, \varepsilon), \quad w(t) = w_k(t, \varepsilon). \quad (1.10)$$

Совокупность таких режимов обозначим через  $\mathcal{U}_k$  и заметим, что их количество совпадает с количеством всевозможных разбиений (1.5), а значит, равно  $C_m^k$ .

Для того чтобы перейти к вопросу об устойчивости циклов семейства  $\mathcal{U}_k$ , сделаем два полезных наблюдения.

Во-первых, несложная проверка показывает, что система (1.4) инвариантна относительно замен

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}), \quad (1.11)$$

где  $(j_1, j_2, \dots, j_m)$  – произвольная перестановка набора индексов  $(1, 2, \dots, m)$ . Во-вторых, периодические режимы из семейства  $\mathcal{U}_k$  допускают кодирование с помощью символьных векторов вида

$$(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m) : \vartheta_j = a \quad \text{или} \quad b, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.12)$$

Точнее говоря, предполагаем, что  $j$ -я координата вектора (1.12) равна  $a$  или  $b$  при  $j \in \mathcal{A}$  или  $j \in \mathcal{B}$  соответственно. В этом случае между векторами (1.12), содержащими  $k$  символов  $a$  и  $m-k$  символов  $b$ , и циклами семейства  $\mathcal{U}_k$  имеет место взаимно однозначное соответствие.

Суммируя сказанное выше, убеждаемся в том, что любые два цикла из  $\mathcal{U}_k$  переходят друг в друга под действием замен (1.11), а значит, имеют одинаковые свойства устойчивости. Таким образом, вопрос об устойчивости всех режимов семейства  $\mathcal{U}_k$  сводится к исследованию устойчивости только одного цикла (1.6), (1.10), соответствующего символьному вектору

$$\underbrace{(a, \dots, a)}_k, \underbrace{(b, \dots, b)}_{m-k}. \quad (1.13)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.2.** *Периодические режимы семейства  $\mathcal{U}_k$  экспоненциально орбитально устойчивы при  $k = 1$  и неустойчивы при  $2 \leq k \leq m - 1$ .*

Завершая описание основных результатов, добавим, что, согласно оценке (1.8), при условии  $h < \min_{1 \leq s \leq m-1} \ln(\beta_s/\alpha_s) = \ln(\beta_{m-1}/\alpha_{m-1})$  в системе (1.4) сосуществуют двухкластерные режимы всех семейств  $\mathcal{U}_s$ ,  $s = \overline{1, m-1}$ . Однако устойчивыми среди них являются лишь  $m$  циклов из  $\mathcal{U}_1$ .

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

**2.1. Существование цикла  $C_k$ .** Предположим, что параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $h$  удовлетворяют ограничениям (1.3), (1.8), и рассмотрим систему (1.7). Ее исследование существенным образом облегчает то, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  она допускает предельный объект. Действительно, учитывая очевидное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega(y, \varepsilon)} = R(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{при } y > 0, \\ 1 & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $y = \text{const} \neq 0$ , нетрудно увидеть, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и априорном условии  $w > 0$  система (1.7) переходит в релейную систему с запаздыванием

$$\dot{v} = -1 + \alpha_k \exp(-v)R(v(t-h)), \quad \dot{w} = -1 + \beta_k \exp(-w)R(w(t-h)). \quad (2.2)$$

Как и в работах [4–6], понятие решения системы (2.2) определим конструктивно. В связи с этим, принимая во внимание неравенство  $\alpha_k > 1$  (см. (1.3)), зафиксируем некоторое

$$\sigma_0 : 0 < \sigma_0 < \bar{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \ln[\alpha_k/(\alpha_k - 1)], \quad (2.3)$$

введем в рассмотрение банахово пространство  $E = C([-h - \sigma_0, -\sigma_0]; \mathbb{R}^2)$  вектор-функций  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  с нормой

$$\|\varphi\|_E = \max_{-h-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} \max_{s=1,2} |\varphi_s(t)|,$$

положим

$$\theta(t) = \ln(\alpha_k - (\alpha_k - 1) \exp(-t)), \quad t \in (-\bar{\sigma}, +\infty), \quad (2.4)$$

и рассмотрим множество вектор-функций  $\varphi(t) \in E$ , выделяемое условиями:

$$\varphi_1(t) < 0, \quad \varphi_2(t) > 0, \quad t \in [-h - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi_1(-\sigma_0) = \theta(-\sigma_0). \quad (2.5)$$

Отметим, что семейство (2.5) определено корректно, так как

$$\theta(t) > 0 \quad \text{при } t \in (0, +\infty), \quad \theta(t) < 0 \quad \text{при } t \in (-\bar{\sigma}, 0). \quad (2.6)$$

Тем самым в силу неравенства (2.3) точка  $t = -\sigma_0$  принадлежит области определения функции (2.4) и  $\theta(-\sigma_0) < 0$ .

Обозначим через  $(v_\varphi(t), w_\varphi(t))$ ,  $t \geq -\sigma_0$ , решение системы (2.2) с произвольной начальной функцией  $\varphi(t)$  из (2.5) и будем строить его методом шагов, рассматривая последовательно отрезки времени длины  $h$ . Точнее говоря, сначала мы найдем его компоненту  $v_\varphi(t)$  (что возможно, так как уравнение для  $v$  отщепляется от системы (2.2)), а затем проинтегрируем второе уравнение системы (2.2) при уже известной функции  $v(t-h) = v_\varphi(t-h)$ .

Начнем с рассмотрения отрезка  $t \in [-\sigma_0, h - \sigma_0]$  и заметим, что при указанных  $t$  выполняется неравенство  $\varphi_1(t-h) < 0$ . Поэтому на данном промежутке времени согласно соотношениям (2.1), (2.2) функция  $v_\varphi(t)$  является решением задачи Коши  $\dot{v} = -1 + \alpha_k \exp(-v)$ ,  $v|_{t=-\sigma_0} = \theta(-\sigma_0)$  и, следовательно,

$$v_\varphi(t) = \theta(t). \quad (2.7)$$

Ясно также, что равенство (2.7) сохраняется до тех пор, пока  $v_\varphi(t-h) < 0$ . Тем самым в силу неравенств (2.6) оно справедливо на полуинтервале  $-\sigma_0 \leq t < h$ .

При  $t = h$  первый раз происходит переключение, а при  $t > h$  компонента  $v_\varphi(t)$  определяется уже из задачи Коши  $\dot{v} = -1$ ,  $v|_{t=h} = \theta(h)$ , т.е. посредством равенства

$$v_\varphi(t) = t_0 - t, \quad t_0 = h + \theta(h) > h. \quad (2.8)$$

В свою очередь равенство (2.8) остается в силе, пока  $v_\varphi(t-h) > 0$ , т.е. до очередного момента переключения  $t = t_0 + h$ . На промежутке  $t_0 + h \leq t \leq T_0 - \sigma_0$ , где

$$T_0 = 2h + \ln[1 + (\alpha_k - 1)(1 - \exp(-h))] + \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_k - 1}(1 - \exp(-h))\right), \quad (2.9)$$

функция  $v_\varphi(t)$  задается аналогичным (2.7) равенством

$$v_\varphi(t) = \theta(t - T_0). \quad (2.10)$$

Для завершения построения компоненты  $v_\varphi(t)$  уточним выбор параметра  $\sigma_0$  в условиях (2.5). Будем считать, что помимо неравенства (2.3) он удовлетворяет оценке

$$\sigma_0 < \min(T_0 - t_0 - h, h). \quad (2.11)$$

Указанный выбор параметра  $\sigma_0$  и уже полученные соотношения (2.7)–(2.10) гарантируют справедливость для функции  $v_\varphi(t+T_0)$  на отрезке времени  $-\sigma_0 - h \leq t \leq -\sigma_0$  требований (2.5) (касающихся компоненты  $\varphi_1(t)$ ). Это означает, что при  $t \geq T_0 - \sigma_0$  весь процесс построения функции  $v_\varphi(t)$  циклически повторяется. Более того, для любого начального условия  $\varphi(t)$  из (2.5) соответствующая компонента  $v_\varphi(t)$  при всех  $t \geq -\sigma_0$  совпадает с одной и той же  $T_0$ -периодической функцией

$$v_0(t) = \begin{cases} \theta(t) & \text{при } 0 \leq t \leq h, \\ t_0 - t & \text{при } h \leq t \leq t_0 + h, \\ \theta(t - T_0) & \text{при } t_0 + h \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad v_0(t + T_0) \equiv v_0(t). \quad (2.12)$$

Примерный график функции  $v_0(t)$  и сам процесс построения компоненты  $v_\varphi(t)$  представлены на рис. 1.

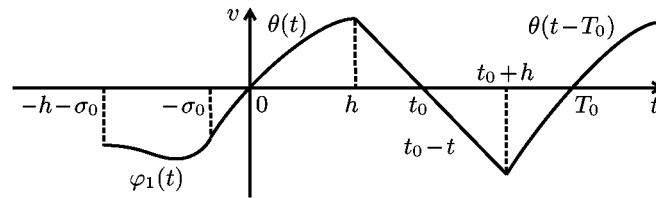


Рис. 1.

Нахождение компоненты  $w_\varphi(t)$  не вызывает принципиальных затруднений, так как для нее получается задача Коши

$$\dot{w} = -1 + \beta_k \exp(-w)R(v_0(t-h)), \quad w|_{t=-\sigma_0} = \varphi_2(-\sigma_0). \quad (2.13)$$

Учитывая в правой части уравнения (2.13) уже известные представления (2.12) для функции  $v_0(t)$ , заключаем, что

$$w_\varphi(t) = w(t, z)|_{z=\ln[\beta_k(1-\exp(-\sigma_0))+\exp(\varphi_2(-\sigma_0)-\sigma_0)]}, \quad (2.14)$$

где

$$w(t, z) = \begin{cases} \omega_1(t, z) & \text{при } -\sigma_0 \leq t \leq h, \\ h + \omega_1(h, z) - t & \text{при } h \leq t \leq t_0 + h, \\ \omega_2(t, z) & \text{при } t_0 + h \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\omega_1(t, z) = \ln(\beta_k + (\exp z - \beta_k) \exp(-t)), \quad (2.16)$$

$$\omega_2(t, z) = \ln[\beta_k + (\exp(\omega_1(h, z) - t_0) - \beta_k) \exp(-(t - t_0 - h))]. \quad (2.17)$$

Напомним, что в связи с предстоящим доказательством теоремы 1.1 нас интересует периодическое решение релейной системы (2.2). Периодичность компоненты  $v_\varphi(t)$  уже установлена выше (см. (2.12)). В силу (2.13) условие  $T_0$ -периодичности компоненты  $w_\varphi(t)$  эквивалентно требованию

$$w_\varphi(0) = w_\varphi(T_0). \quad (2.18)$$

Кроме того, нас интересует случай

$$w_\varphi(t) > 0, \quad t \in [0, T_0], \quad (2.19)$$

так как именно при этом условии осуществлен предельный переход от системы (1.7) к (2.2).

Проанализируем соотношения (2.18), (2.19). Первое из них будем рассматривать как уравнение относительно входящей в (2.14) переменной  $z$  (эта переменная изменяется на полуоси  $\{z : z > \ln[\beta_k(1 - \exp(-\sigma_0)) + \exp(-\sigma_0)]\}$ , так как зависит от значения  $\varphi_2(-\sigma_0) > 0$ , которое произвольно). Нетрудно заметить, что интересующее нас уравнение записывается в виде

$$z = \Phi(z), \quad (2.20)$$

где

$$\Phi(z) = \ln[\beta_k(1 + \exp(-(T_0 - h)) - \exp(-T_0) - \exp(-(T_0 - t_0 - h))) + \exp(z - T_0)]. \quad (2.21)$$

Неравенство (2.19) эквивалентно условиям

$$z > 0, \quad \omega_1(h, z) - t_0 > 0. \quad (2.22)$$

Опишем последующий способ действий. Сначала из равенств (2.20), (2.21) находим

$$z = z_0 \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left[ \frac{\beta_k(1 + \exp(-(T_0 - h)) - \exp(-T_0) - \exp(-(T_0 - t_0 - h)))}{1 - \exp(-T_0)} \right] \quad (2.23)$$

и подставляем в неравенства (2.22). В результате получаем условие

$$\begin{aligned} \beta_k > \max \left( \frac{(1 - \exp(-T_0)) \exp t_0}{1 - \exp(-(T_0 - t_0))}, \frac{1 - \exp(-T_0)}{1 + \exp(-(T_0 - h)) - \exp(-T_0) - \exp(-(T_0 - t_0 - h))} \right) = \\ = \frac{(1 - \exp(-T_0)) \exp t_0}{1 - \exp(-(T_0 - t_0))}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

И наконец, учитывая явные формулы для  $t_0$ ,  $T_0$  (см. равенства (2.7)–(2.9)), после некоторых преобразований убеждаемся в том, что правая часть из неравенства (2.24) равна  $\alpha_k \exp h$ . Таким образом, данное условие эквивалентно неравенству (1.8), которое мы считаем выполненным.

Подведем итог. Предположим, что параметр  $\sigma_0$  помимо условий (2.3), (2.11) удовлетворяет неравенству

$$\ln[\beta_k(1 - \exp(-\sigma_0)) + \exp(-\sigma_0)] < z_0, \quad (2.25)$$

означающему, что  $z = z_0$  является допустимым значением переменной  $z$ , реализующимся при

$$\varphi_2(-\sigma_0) = \varphi_2^0 \stackrel{\text{def}}{=} \ln[\beta_k(1 - \exp \sigma_0) + \exp(z_0 + \sigma_0)] > 0.$$

Тогда решение  $(v_\varphi(t), w_\varphi(t))$  системы (2.2) с любой начальной функцией  $\varphi(t)$  из множества (2.5), для которой  $\varphi_2(-\sigma_0) = \varphi_2^0$ , при всех  $t \geq -\sigma_0$  совпадает с одной и той же  $T_0$ -периодической вектор-функцией  $(v_0(t), w_0(t))$ . Для ее компоненты  $v_0(t)$  справедливы равенства (2.12), а для компоненты  $w_0(t)$  – соотношения

$$w_0(t) = w(t, z)|_{z=z_0}, \quad w_0(t) > 0, \quad t \in [0, T_0], \quad w_0(t + T_0) \equiv w_0(t), \quad (2.26)$$

где  $w(t, z)$  определяется равенствами (2.15)–(2.17). Примерный график функции  $w_0(t)$  изображен на рис. 2.

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями систем (1.7) и (2.2). Для получения соответствующего строгого результата необходимо несколько сузить множество начальных функций (2.5). Способ такого сужения опишем ниже.

Введем в рассмотрение отображения

$$z \rightarrow P^t(z) \stackrel{\text{def}}{=} \ln(\alpha_k + (\exp z - \alpha_k) \exp(-t)), \quad (2.27)$$

$$\Phi_{\sigma_0} = P^{-\sigma_0} \circ \Phi \circ P^{\sigma_0},$$

где  $\Phi$  – отображение, порожденное функцией (2.21). Далее, зафиксируем некоторое  $\delta_0 > 0$  и рассмотрим отрезок  $J = P^{-\sigma_0}([z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0])$ . Параметр  $\delta_0$  будем считать настолько малым, что

$$[z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0] \subset (0, +\infty), \quad J \subset (0, +\infty), \quad \min_{\substack{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2 \\ z_0 - \delta_0 \leq z \leq z_0 + \delta_0}} w(t, z) > 0. \quad (2.28)$$

Подчеркнем, что условия (2.28) заведомо достижимы, так как в силу условий (2.22), (2.25), (2.26) имеем  $z_0 > 0$ ,  $P^{-\sigma_0}(z_0) > 0$ ,  $w(t, z_0) > 0$ ,  $t \in [-\sigma_0, T_0 - \sigma_0/2]$ .

Еще одно ограничение на  $\delta_0$  связано с отображением  $\Phi_{\sigma_0}$  (см. (2.27)). Нетрудно увидеть, что на множестве  $\text{int } J$  ( $\text{int } J$  – внутренность отрезка  $J$ ) оно имеет неподвижную точку  $z_{\sigma_0} = P^{-\sigma_0}(z_0)$ , причем

$$\frac{d}{dz} \Phi_{\sigma_0}(z)|_{z=z_{\sigma_0}} = \Phi'(z_0) \in (0, 1). \quad (2.29)$$

Свойство (2.29) гарантирует справедливость при всех достаточно малых  $\delta_0 > 0$  включения

$$\Phi_{\sigma_0}(J) \subset \text{int } J. \quad (2.30)$$

Таким образом, уменьшая, если необходимо, значение  $\delta_0$ , будем считать это включение выполненным.

Обозначим через  $S \subset E$  множество начальных вектор-функций  $\varphi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ , удовлетворяющих условиям

$$-q_1 \leq \varphi_1(t) \leq -q_2, \quad \varphi_1(-\sigma_0) = \theta(-\sigma_0), \quad q_3 \leq \varphi_2(t) \leq q_4, \quad \varphi_2(-\sigma_0) \in J. \quad (2.31)$$

Здесь параметры  $\sigma_0$ ,  $\delta_0$  подчинены требованиям (2.3), (2.11), (2.25), (2.28), (2.30), а постоянные  $q_s > 0$ ,  $s = \overline{1, 4}$ , такие, что

$$q_1 > - \min_{-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} v_0(t), \quad 0 < q_2 < - \max_{-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} v_0(t), \quad (2.32)$$

$$0 < q_3 < \min_{\substack{T_0 - \sigma_0 - h \leq t \leq T_0 - \sigma_0 \\ z_0 - \delta_0 \leq z \leq z_0 + \delta_0}} w(t, z), \quad q_4 > \max_{\substack{T_0 - \sigma_0 - h \leq t \leq T_0 - \sigma_0 \\ z_0 - \delta_0 \leq z \leq z_0 + \delta_0}} w(t, z).$$

Приведенное множество  $S$ , более узкое, чем (2.5), и является искомым.

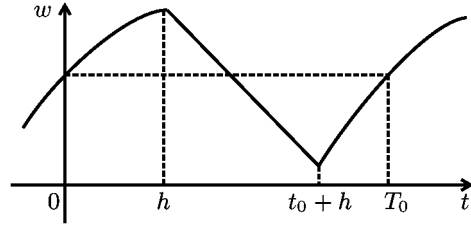


Рис. 2.

Для произвольной функции  $\varphi \in S$  введем в рассмотрение решение  $(v_\varphi(t, \varepsilon), w_\varphi(t, \varepsilon))$ ,  $t \geq -\sigma_0$ , системы (1.7) с начальным условием  $\varphi(t)$ ,  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ , а через  $t = T_\varphi$  обозначим второй положительный корень уравнения

$$v_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = \theta(-\sigma_0) \quad (2.33)$$

(если он существует). Далее, зададим оператор  $\Pi_\varepsilon : S \rightarrow E$  равенством

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = (v_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), w_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon)), \quad -h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (2.34)$$

Справедлива

**Лемма 2.1.** Пусть параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $h$  удовлетворяют условиям (1.3), (1.8), а множество  $S$  выбрано описанным выше способом (см. (2.31), (2.32)). Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  оператор (2.34) определен на  $S$  и  $\Pi_\varepsilon(S) \subset S$ .

**Доказательство.** Установим сначала равномерные по  $\varphi \in S$  асимптотические формулы для решения  $(v_\varphi(t, \varepsilon), w_\varphi(t, \varepsilon))$  на различных промежутках изменения  $t$ . Соответствующий анализ проведем при априорном предположении

$$w_\varphi(t, \varepsilon) \geq q, \quad t \in [-\sigma_0, T_0 - \sigma_0/2], \quad (2.35)$$

где здесь и ниже одним и тем же символом  $q$  обозначаются различные универсальные (не зависящие от  $\varepsilon$  и  $\varphi$ ) положительные постоянные, точные значения которых несущественны. Смысл оценки (2.35) в том, что она приводит к равномерному по  $\varphi \in S$ ,  $t \in [-\sigma_0, T_0 - \sigma_0/2]$  асимптотическому равенству

$$\frac{1}{\Omega(w_\varphi(t - h, \varepsilon), \varepsilon)} = O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.36)$$

значительно упрощающему исследование системы (1.7).

Построение асимптотики функций  $v_\varphi(t, \varepsilon)$ ,  $w_\varphi(t, \varepsilon)$  начнем с отрезка  $-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$ , на котором, согласно системе (1.7), они определяются из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -1 + \exp(-v) \left( \frac{\alpha_k}{\Omega(\varphi_1(t - h), \varepsilon)} + \frac{\beta_{m-k}}{\Omega(\varphi_2(t - h), \varepsilon)} \right), \quad v|_{t=-\sigma_0} = \theta(-\sigma_0), \\ \dot{w} &= -1 + \exp(-w) \left( \frac{\alpha_{m-k}}{\Omega(\varphi_2(t - h), \varepsilon)} + \frac{\beta_k}{\Omega(\varphi_1(t - h), \varepsilon)} \right), \quad w|_{t=-\sigma_0} = \varphi_2(-\sigma_0). \end{aligned}$$

Далее, учитывая неравенства из (2.31), замечаем, что равномерно по  $-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$ ,  $\varphi \in S$  справедливы равенства

$$\frac{1}{\Omega(\varphi_1(t - h), \varepsilon)} = 1 + O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \frac{1}{\Omega(\varphi_2(t - h), \varepsilon)} = O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда очевидным образом следует, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют место равномерные по  $\varphi \in S$ ,  $t \in [-\sigma_0, h - \sigma_0]$  асимптотические представления

$$\begin{aligned} v_\varphi(t, \varepsilon) &= v_\varphi(t) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad \dot{v}_\varphi(t, \varepsilon) = \dot{v}_\varphi(t) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ w_\varphi(t, \varepsilon) &= w_\varphi(t) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad \dot{w}_\varphi(t, \varepsilon) = \dot{w}_\varphi(t) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где, напомним,  $v_\varphi(t)$ ,  $w_\varphi(t)$  – компоненты решения релейной системы (2.2).

На следующем этапе рассмотрим отрезок  $h - \sigma_0 \leq t \leq h - \sqrt{\varepsilon}$ , длина которого в силу оценки (2.11) меньше  $h$ . Тем самым при рассматриваемых  $t$  функция  $v_\varphi(t - h, \varepsilon)$  уже найдена и задана соответствующим равенством из (2.37). Учитывая в этом равенстве известные свойства  $v_\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{v}_\varphi(0) = \alpha_k - 1 > 0$ , убеждаемся в том, что на данном отрезке справедлива оценка

$$v_\varphi(t - h, \varepsilon) \leq -q\sqrt{\varepsilon}, \quad (2.38)$$

где  $q$  – любая константа из интервала  $(0, \alpha_k - 1)$ .

Из оценки (2.38) вытекает равномерное по  $t$ ,  $\varphi$  асимптотическое представление

$$\frac{1}{\Omega(v_\varphi(t-h, \varepsilon), \varepsilon)} = 1 + O\left(\exp\left(\frac{-q}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.39)$$

Подставляя его вместе с представлением (2.36) в правые части системы (1.7), заключаем, что при  $t \in [h - \sigma_0, h - \sqrt{\varepsilon}]$  аналогичные (2.37) асимптотические формулы сохраняются. Однако остатки в них равномерно по  $t$ ,  $\varphi$  становятся величинами  $O(\exp(-q/\sqrt{\varepsilon}))$ .

Перейдем теперь к рассмотрению отрезка  $h - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq h + \sqrt{\varepsilon}$ . Характерной его особенностью является то, что он содержит момент переключения  $t = h$  релейной системы (2.2). В связи с этим на данном участке компоненты  $v_\varphi(t, \varepsilon)$ ,  $w_\varphi(t, \varepsilon)$  остаются асимптотически близкими к значениям  $v_\varphi(h)$ ,  $w_\varphi(h)$ , в то время как их производные по  $t$  претерпевают изменения порядка единицы.

Действительно, выполним в системе (1.7) замены

$$v = v_\varphi(h) + \varepsilon \tilde{\varkappa}_1, \quad w = w_\varphi(h) + \varepsilon \tilde{\varkappa}_2, \quad \tau = (t - h)/\varepsilon \quad (2.40)$$

и учтем в ее правых частях соотношение (2.36) вместе с вытекающим из (2.37) равенством  $v_\varphi(t-h, \varepsilon) = v_\varphi(t-h) + O(\exp(-q/\varepsilon))$ . В результате для нахождения функций  $\tilde{\varkappa}_1$ ,  $\tilde{\varkappa}_2$  приходим к задаче Коши

$$\frac{d\tilde{\varkappa}_1}{d\tau} = -1 + \exp(-v_\varphi(h) - \varepsilon \tilde{\varkappa}_1) \left( \frac{\alpha_k}{1 + \exp((\alpha_k - 1)\tau + O(\varepsilon\tau^2))} + O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon}\right)\right) \right), \quad (2.41)$$

$$\frac{d\tilde{\varkappa}_2}{d\tau} = -1 + \exp(-w_\varphi(h) - \varepsilon \tilde{\varkappa}_2) \left( \frac{\beta_k}{1 + \exp((\alpha_k - 1)\tau + O(\varepsilon\tau^2))} + O\left(\exp\left(\frac{-q}{\varepsilon}\right)\right) \right),$$

$$\tilde{\varkappa}_1|_{\tau=-1/\sqrt{\varepsilon}} = \frac{v_\varphi(h - \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) - v_\varphi(h)}{\varepsilon} = -\frac{\dot{v}_\varphi(h-0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\ddot{v}_\varphi(h-0)}{2} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (2.42)$$

$$\tilde{\varkappa}_2|_{\tau=-1/\sqrt{\varepsilon}} = \frac{w_\varphi(h - \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) - w_\varphi(h)}{\varepsilon} = -\frac{\dot{w}_\varphi(h-0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\ddot{w}_\varphi(h-0)}{2} + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где все остатки равномерны по  $\varphi \in S$ . Несложный анализ задачи (2.41), (2.42) приводит к равенствам

$$\tilde{\varkappa}_1 = \tilde{\varkappa}_{1,0}(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \tilde{\varkappa}_2 = \tilde{\varkappa}_{2,0}(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.43)$$

где

$$\tilde{\varkappa}_{1,0}(\tau) = -\tau + \frac{\alpha_k \exp(-v_\varphi(h))}{\alpha_k - 1} \ln \frac{\exp((\alpha_k - 1)\tau)}{1 + \exp((\alpha_k - 1)\tau)} + \frac{\ddot{v}_\varphi(h-0)}{2}, \quad (2.44)$$

$$\tilde{\varkappa}_{2,0}(\tau) = -\tau + \frac{\beta_k \exp(-w_\varphi(h))}{\alpha_k - 1} \ln \frac{\exp((\alpha_k - 1)\tau)}{1 + \exp((\alpha_k - 1)\tau)} + \frac{\ddot{w}_\varphi(h-0)}{2},$$

а остатки равномерны по  $\tau \in [-1/\sqrt{\varepsilon}, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ ,  $\varphi \in S$ .

Возвратимся теперь к исходным функциям  $v_\varphi(t, \varepsilon)$ ,  $w_\varphi(t, \varepsilon)$ . После подстановки выражений (2.43), (2.44) в равенства (2.40) для них при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем равномерные по  $t \in [h - \sqrt{\varepsilon}, h + \sqrt{\varepsilon}]$ ,  $\varphi \in S$  асимптотические представления

$$v_\varphi(t, \varepsilon) = v_\varphi(h) + \varepsilon \tilde{\varkappa}_{1,0}(\tau)|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (2.45)$$

$$w_\varphi(t, \varepsilon) = w_\varphi(h) + \varepsilon \tilde{\varkappa}_{2,0}(\tau)|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Добавим еще, что эти равенства допускают дифференцирование по  $t$ , но после указанной операции остатки в них становятся величинами порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ .



Очередной этап построения асимптотики решений системы (1.7) связан с рассмотрением отрезка  $h + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq t_0 + h - \sqrt{\varepsilon}$  при априорном предположении

$$v_\varphi(t - h, \varepsilon) \geq q\sqrt{\varepsilon}, \quad t \in [h + \sqrt{\varepsilon}, t_0 + h - \sqrt{\varepsilon}]. \quad (2.46)$$

Из него вытекает аналогичное (2.39) равномерное по  $\varphi$ ,  $t$  асимптотическое представление

$$\frac{1}{\Omega(v_\varphi(t - h, \varepsilon), \varepsilon)} = O\left(\exp\left(\frac{-q}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Учитывая его вместе с равенством (2.36) в правых частях системы (1.7), получаем систему

$$\dot{v} = -1 + O(\exp(-q/\sqrt{\varepsilon})), \quad \dot{w} = -1 + O(\exp(-q/\sqrt{\varepsilon})), \quad (2.47)$$

которую, согласно (2.45), следует дополнить начальными условиями

$$\begin{aligned} v|_{t=h+\sqrt{\varepsilon}} &= v_\varphi(h + \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) = v_\varphi(h) + \varepsilon \tilde{\mathfrak{X}}_{1,0}(1/\sqrt{\varepsilon}) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ w|_{t=h+\sqrt{\varepsilon}} &= w_\varphi(h + \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) = w_\varphi(h) + \varepsilon \tilde{\mathfrak{X}}_{2,0}(1/\sqrt{\varepsilon}) + O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Для анализа задачи Коши (2.47), (2.48) необходимо знать поведение функций  $\tilde{\mathfrak{X}}_{1,0}(\tau)$ ,  $\tilde{\mathfrak{X}}_{2,0}(\tau)$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Из формул (2.44) несложно получить представления

$$\tilde{\mathfrak{X}}_{1,0}(\tau) = -\tau + \frac{\ddot{v}_\varphi(h-0)}{2} + O(\exp(-(\alpha_k - 1)\tau)), \quad (2.49)$$

$$\tilde{\mathfrak{X}}_{2,0}(\tau) = -\tau + \frac{\ddot{w}_\varphi(h-0)}{2} + O(\exp(-(\alpha_k - 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Учитывая далее соотношения (2.49) в (2.48), убеждаемся в том, что на интересующем нас отрезке при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют место равномерные по  $t$ ,  $\varphi$  асимптотические представления

$$\begin{aligned} v_\varphi(t, \varepsilon) &= v_\varphi(h) + h - t + \varepsilon \frac{\ddot{v}_\varphi(h-0)}{2} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \dot{v}_\varphi(t, \varepsilon) = -1 + O(\exp(-q/\sqrt{\varepsilon})), \\ w_\varphi(t, \varepsilon) &= w_\varphi(h) + h - t + \varepsilon \frac{\ddot{w}_\varphi(h-0)}{2} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \dot{w}_\varphi(t, \varepsilon) = -1 + O(\exp(-q/\sqrt{\varepsilon})). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Априорное условие (2.46) вытекает из полученных формул для  $v_\varphi(t, \varepsilon)$  при  $-\sigma_0 \leq t \leq t_0 + h - \sqrt{\varepsilon}$  (см. представления (2.37), (2.45), (2.50)) и известных формул для  $v_\varphi(t)$ . Более того, в качестве константы  $q$  в (2.46) можно взять любое число из интервала  $(0, \min(1, \alpha_k - 1))$ .

Оставшиеся два случая  $t \in [t_0 + h - \sqrt{\varepsilon}, t_0 + h + \sqrt{\varepsilon}]$  и  $t \in [t_0 + h + \sqrt{\varepsilon}, T_0 - \sigma_0/2]$  вполне аналогичны уже разобранным выше вариантам  $t \in [h - \sqrt{\varepsilon}, h + \sqrt{\varepsilon}]$  и  $t \in [h + \sqrt{\varepsilon}, t_0 + h - \sqrt{\varepsilon}]$ . Поэтому для них приведем сразу окончательные результаты. В первом случае при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t \in [t_0 + h - \sqrt{\varepsilon}, t_0 + h + \sqrt{\varepsilon}]$ ,  $\varphi \in S$  имеем

$$\begin{aligned} v_\varphi(t, \varepsilon) &= v_\varphi(t_0 + h) + \varepsilon \tilde{\mathfrak{X}}_{1,0}(\tau)|_{\tau=(t-t_0-h)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}), \\ w_\varphi(t, \varepsilon) &= w_\varphi(t_0 + h) + \varepsilon \tilde{\mathfrak{X}}_{2,0}(\tau)|_{\tau=(t-t_0-h)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \quad (2.51)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{X}}_{1,0}(\tau) &= -\tau - \alpha_k \exp(-v_\varphi(t_0 + h)) \ln \frac{\exp(-\tau + \ddot{v}_\varphi(h-0)/2)}{1 + \exp(-\tau + \ddot{v}_\varphi(h-0)/2)} + \frac{\ddot{v}_\varphi(h-0)}{2}, \\ \tilde{\mathfrak{X}}_{2,0}(\tau) &= -\tau - \beta_k \exp(-w_\varphi(t_0 + h)) \ln \frac{\exp(-\tau + \ddot{w}_\varphi(h-0)/2)}{1 + \exp(-\tau + \ddot{w}_\varphi(h-0)/2)} + \frac{\ddot{w}_\varphi(h-0)}{2}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Во втором же случае при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливы равномерные по  $t \in [t_0 + h + \sqrt{\varepsilon}, T_0 - \sigma_0/2]$ ,  $\varphi \in S$  асимптотические представления

$$\begin{aligned} v_\varphi(t, \varepsilon) &= v_\varphi(t) + O(\varepsilon), & \dot{v}_\varphi(t, \varepsilon) &= \dot{v}_\varphi(t) + O(\varepsilon), \\ w_\varphi(t, \varepsilon) &= w_\varphi(t) + O(\varepsilon), & \dot{w}_\varphi(t, \varepsilon) &= \dot{w}_\varphi(t) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Следует также добавить, что соотношения (2.51) допускают дифференцирование по  $t$ . Но, как и в случае представлений (2.45), остатки в них после дифференцирования становятся величинами порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Подведем некоторый итог. Объединяя соотношения (2.37), (2.45), (2.50)–(2.53), заключаем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t \in [-\sigma_0, T_0 - \sigma_0/2]$ ,  $\varphi \in S$  имеют место асимптотические равенства

$$v_\varphi(t, \varepsilon) = v_\varphi(t) + O(\varepsilon), \quad w_\varphi(t, \varepsilon) = w_\varphi(t) + O(\varepsilon). \quad (2.54)$$

Для производных  $\dot{v}_\varphi(t, \varepsilon)$ ,  $\dot{w}_\varphi(t, \varepsilon)$  аналогичные асимптотические представления

$$\dot{v}_\varphi(t, \varepsilon) = \dot{v}_\varphi(t) + O(\varepsilon), \quad \dot{w}_\varphi(t, \varepsilon) = \dot{w}_\varphi(t) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.55)$$

справедливы равномерно по  $t \in \Sigma_0$ ,  $\varphi \in S$ , где

$$\Sigma_0 = [-\sigma_0, T_0 - \sigma_0/2] \setminus \{(h - \sqrt{\varepsilon}, h + \sqrt{\varepsilon}) \cup (t_0 + h - \sqrt{\varepsilon}, t_0 + h + \sqrt{\varepsilon})\}. \quad (2.56)$$

Напомним, однако, что все наши построения проводились при априорном предположении (2.35). Поскольку в силу третьего условия из (2.28) имеем  $w_\varphi(t) > 0$  при  $t \in [-\sigma_0, T_0 - \sigma_0/2]$ ,  $\varphi \in S$ , то требование (2.35) действительно выполняется с константой  $q$  из интервала

$$0 < q < \min_{\substack{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2 \\ z_0 - \delta_0 \leq z \leq z_0 + \delta_0}} w(t, z).$$

Перейдем теперь к исследованию оператора  $\Pi_\varepsilon(\varphi)$ . Из равенств (2.54), (2.55) вытекает, что интересующий нас корень  $t = T_\varphi$  уравнения (2.33) асимптотически близок ко второму положительному корню  $t = T_0$  предельного уравнения  $v_\varphi(t - \sigma_0) = \theta(-\sigma_0)$ . Тем самым  $T_\varphi$  определяется однозначно и допускает при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерное по  $\varphi \in S$  асимптотическое представление

$$T_\varphi = T_0 + O(\varepsilon). \quad (2.57)$$

Отсюда и из равенств (2.54) в свою очередь следует, что при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  оператор (2.34) определен на множестве  $S$  и удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\sup_{\varphi \in S} \|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \Pi_0(\varphi)\|_E = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.58)$$

где  $\Pi_0(\varphi) = (v_\varphi(t + T_0), w_\varphi(t + T_0))$ ,  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ .

Для завершения обоснования леммы 2.1 осталось убедиться в справедливости включения  $\Pi_\varepsilon(S) \subset S$ . В связи с этим обратим внимание, что в силу определения множества  $S$  (см. (2.28)–(2.32)) имеет место свойство  $\Pi_0(S) \subset \widehat{S}$ , где  $\widehat{S} \subset S$  – множество вектор-функций  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ , удовлетворяющих аналогичным (2.31) условиям

$$-q_1 < \varphi_1(t) < -q_2, \quad \varphi_1(-\sigma_0) = \theta(-\sigma_0), \quad q_3 < \varphi_2(t) < q_4, \quad \varphi_2(-\sigma_0) \in \text{int } J.$$

Действительно, неравенства  $-q_1 < v_\varphi(t + T_0) < -q_2$ ,  $q_3 < w_\varphi(t + T_0) < q_4$  на отрезке  $t \in [-h - \sigma_0, -\sigma_0]$  вытекают из явных формул для  $v_\varphi(t)$ ,  $w_\varphi(t)$  и оценок (2.32). Включение  $w_\varphi(T_0 - \sigma_0) \in \text{int } J$  является следствием равенства  $w_\varphi(T_0 - \sigma_0) = \Phi_{\sigma_0}(\varphi_2(-\sigma_0))$  и условия (2.30).

Остается добавить, что из отмеченного выше свойства и равенства (2.58) требуемое включение  $\Pi_\varepsilon(S) \subset S$  выводится автоматически. Лемма 2.1 доказана.

Итак, при выполнении условий леммы 2.1 оператор  $\Pi_\varepsilon$ , являющийся очевидным образом компактным, преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество  $S$ . Отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера следует, что этот оператор имеет в  $S$  по крайней мере одну неподвижную точку  $\varphi_* = (\varphi_1^*(t, \varepsilon), \varphi_2^*(t, \varepsilon))$ . Очевидно также, что решение  $(v_k(t, \varepsilon), w_k(t, \varepsilon)) = (v_\varphi(t, \varepsilon), w_\varphi(t, \varepsilon))|_{\varphi=\varphi_*}$  системы (1.7) оказывается периодическим с периодом  $T_k(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ . Таким образом, установлено существование интересующего нас цикла (1.9).

Асимптотические представления для компонент цикла  $C_k$  и его периода получаются из представлений (2.54)–(2.57) при  $\varphi = \varphi_*$ . В частности, в равенствах (2.14)–(2.17) для  $w_\varphi(t)$  переменную  $z$  следует положить равной

$$z_*(\varepsilon) = \ln[\beta_k(1 - \exp(-\sigma_0)) + \exp(\varphi_2^*(-\sigma_0, \varepsilon) - \sigma_0)]. \quad (2.59)$$

Далее, для нахождения асимптотики функции (2.59) по  $\varepsilon$  обратимся к аналогичному (2.18) равенству

$$w_{\varphi_*}(0, \varepsilon) = w_{\varphi_*}(T_{\varphi_*}, \varepsilon) \quad (2.60)$$

и подставим в него асимптотические представления для  $w_{\varphi_*}(t, \varepsilon)$ ,  $T_{\varphi_*}$  (см. (2.54), (2.57)). В результате убеждаемся в том, что равенство (2.60) преобразуется к аналогичному (2.20) виду

$$z_* = \Phi(z_*) + O(\varepsilon),$$

где  $\Phi$  – функция (2.21). Отсюда имеем

$$z_* = z_0 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.61)$$

где  $z_0$  – величина (2.23).

Завершая асимптотический анализ цикла  $C_k$  системы (1.7), приведем перечень итоговых результатов. Из соотношений (2.54)–(2.57), (2.61) вытекают следующие утверждения:

1) на отрезке  $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$  уравнение  $v_k(t, \varepsilon) = 0$  имеет ровно два простых корня  $t = \tau_j(\varepsilon)$ ,  $j = 1, 2$ , допускающие асимптотику

$$\tau_1 = O(\varepsilon), \quad \tau_2 = t_0 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad (2.62)$$

2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливы асимптотические равенства

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2} (|v_k(t, \varepsilon) - v_0(t)| + |w_k(t, \varepsilon) - w_0(t)|) = O(\varepsilon), \quad (2.63)$$

$$\max_{t \in \Sigma} (|\dot{v}_k(t, \varepsilon) - \dot{v}_0(t)| + |\dot{w}_k(t, \varepsilon) - \dot{w}_0(t)|) = O(\varepsilon), \quad T_k(\varepsilon) = T_0 + O(\varepsilon),$$

где  $\Sigma$  – аналогичное (2.56) множество, задающееся равенством

$$\Sigma = [-\sigma_0, T_0 - \sigma_0/2] \setminus \bigcup_{s=1}^2 (h + \tau_s(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}, h + \tau_s(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}), \quad (2.64)$$

а  $(v_0(t), w_0(t))$  – периодическое решение релейной системы (2.2).

**2.2. Устойчивость цикла  $C_k$ .** Вопрос об устойчивости цикла (1.9) системы (1.7) сводится к вопросу о расположении мультипликаторов соответствующей ему системы в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= a_0(t, \varepsilon)g_1 + a_1(t, \varepsilon)g_1(t - h) + a_2(t, \varepsilon)g_2(t - h), \\ \dot{g}_2 &= b_0(t, \varepsilon)g_2 + b_1(t, \varepsilon)g_1(t - h) + b_2(t, \varepsilon)g_2(t - h). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Здесь

$$a_0(t, \varepsilon) = -\exp(-v_k(t, \varepsilon)) \left( \frac{\alpha_k}{\Omega(v_k(t - h, \varepsilon), \varepsilon)} + \frac{\beta_{m-k}}{\Omega(w_k(t - h, \varepsilon), \varepsilon)} \right), \quad (2.66)$$

$$b_0(t, \varepsilon) = -\exp(-w_k(t, \varepsilon)) \left( \frac{\alpha_{m-k}}{\Omega(w_k(t-h, \varepsilon), \varepsilon)} + \frac{\beta_k}{\Omega(v_k(t-h, \varepsilon), \varepsilon)} \right), \quad (2.67)$$

$$a_1(t, \varepsilon) = -\alpha_k a(t, \varepsilon), \quad b_1(t, \varepsilon) = -\beta_k b(t, \varepsilon), \quad (2.68)$$

$$a_2(t, \varepsilon) = -\frac{\beta_{m-k} \exp(-v_k(t, \varepsilon))}{\Omega^2(w_k(t-h, \varepsilon), \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{w_k(t-h, \varepsilon)}{\varepsilon}\right), \quad (2.69)$$

$$b_2(t, \varepsilon) = -\frac{\alpha_{m-k} \exp(-w_k(t, \varepsilon))}{\Omega^2(w_k(t-h, \varepsilon), \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{w_k(t-h, \varepsilon)}{\varepsilon}\right), \quad (2.70)$$

а функции  $a(t, \varepsilon)$ ,  $b(t, \varepsilon)$  заданы равенствами

$$a(t, \varepsilon) = \frac{\exp(-v_k(t, \varepsilon))}{\Omega^2(v_k(t-h, \varepsilon), \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{v_k(t-h, \varepsilon)}{\varepsilon}\right), \quad (2.71)$$

$$b(t, \varepsilon) = \frac{\exp(-w_k(t, \varepsilon))}{\Omega^2(v_k(t-h, \varepsilon), \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{v_k(t-h, \varepsilon)}{\varepsilon}\right). \quad (2.72)$$

Поясним смысл термина “мультипликатор” применительно к системе (2.65). В связи с этим рассмотрим линейный ограниченный оператор  $\mathcal{V}(\varepsilon) : E \rightarrow E$  (так называемый оператор монодромии), действующий на произвольную функцию  $g(t) \in E$  по правилу

$$\mathcal{V}(\varepsilon)g = g(t + T_k(\varepsilon), \varepsilon), \quad -h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (2.73)$$

где  $g(t, \varepsilon) = (g_1(t, \varepsilon), g_2(t, \varepsilon))$  – решение системы (2.65) на отрезке времени  $-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0$  с начальной функцией  $g(t)$ ,  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ . Отметим, что этот оператор очевидным образом компактен, а значит, его спектр дискретен. Мультипликаторами системы (2.65) по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения оператора (2.73).

Остановимся сначала на некоторых необходимых для дальнейшего анализа свойствах коэффициентов (2.66)–(2.72). Из соотношений (2.63), (2.66), (2.67), (2.69), (2.70) очевидным образом следует, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0} (|a_0(t, \varepsilon)| + |b_0(t, \varepsilon)|) \leq M, \quad (2.74)$$

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0} (|a_2(t, \varepsilon)| + |b_2(t, \varepsilon)|) \leq M \exp(-q/\varepsilon),$$

где  $M, q > 0$  – некоторые не зависящие от  $\varepsilon$  постоянные. Коэффициенты  $a_1(t, \varepsilon)$ ,  $b_1(t, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  изменяются  $\delta$ -образно. Для того чтобы убедиться в этом, изучим свойства вспомогательных функций (2.71), (2.72). Справедлива

**Лемма 2.2.** *При всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  выполняются оценки*

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0} (|a(t, \varepsilon)| + |b(t, \varepsilon)|) \leq M \exp(-q/\varepsilon), \quad \max_{t \in \Sigma} (|a(t, \varepsilon)| + |b(t, \varepsilon)|) \leq M \exp(-q/\sqrt{\varepsilon}), \quad (2.75)$$

где  $\Sigma$  – множество (2.64), а положительные постоянные  $M, q$  не зависят от  $\varepsilon$ . Кроме того, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют место асимптотические представления

$$\int_{h+\tau_1(\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}}^{h+\tau_1(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}} a(t, \varepsilon) dt = \frac{\exp(-v_0(h))}{\alpha_k - 1} + O(\varepsilon), \quad \int_{h+\tau_1(\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}}^{h+\tau_1(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}} b(t, \varepsilon) dt = \frac{\exp(-w_0(h))}{\alpha_k - 1} + O(\varepsilon), \quad (2.76)$$

$$\int_{h+\tau_2(\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}}^{h+\tau_2(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}} a(t, \varepsilon) dt = \exp h + O(\varepsilon), \quad \int_{h+\tau_2(\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}}^{h+\tau_2(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}} b(t, \varepsilon) dt = \exp(-w_0(t_0 + h)) + O(\varepsilon). \quad (2.77)$$

**Доказательство.** Отметим прежде всего, что первая оценка из (2.75) – очевидное следствие равенств (2.71), (2.72), асимптотических свойств (2.63) периодического решения (1.9) и неравенства  $v_0(t-h) < 0$ ,  $t \in [-\sigma_0, h - \sigma_0]$ . Далее, для получения второй оценки из (2.75) на множестве (2.64) учтем в равенствах (2.71), (2.72) соотношения (2.62), (2.63). В результате убеждаемся в том, что при  $t \in \Sigma$  выполняется неравенство

$$|a(t, \varepsilon)| + |b(t, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \exp\left(\frac{-|v_0(t-h)|}{\varepsilon}\right),$$

где  $M$  – положительная постоянная. Так как  $v_0(0) = 0$ ,  $\dot{v}_0(0) = \alpha_k - 1 > 0$ ,  $v_0(t_0) = 0$ ,  $\dot{v}_0(t_0) = -1$  (см. представление (2.12)), то отсюда второе неравенство из (2.75) вытекает очевидным образом.

Рассмотрим асимптотические представления (2.76), (2.77) и докажем, например, асимптотическую формулу для интеграла от  $a(t, \varepsilon)$  по отрезку  $[h + \tau_1(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}, h + \tau_1(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}]$  (остальные случаи изучаются аналогично). Для этого перейдем на указанном отрезке к новой переменной  $\tau$  по формуле  $\tau = (t - \tau_1 - h)/\varepsilon$ . В результате  $v_k(t - h, \varepsilon)/\varepsilon$  запишем в виде функции  $v_k(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon$ , для которой с учетом равенства  $v_k(\tau_1, \varepsilon) = 0$  получим представление

$$v_k(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon = \dot{v}_k(\tau_1 + \varepsilon\bar{\tau}, \varepsilon)\tau, \quad (2.78)$$

где значение  $\bar{\tau}$  такое, что  $|\bar{\tau}| \leq |\tau|$ . Учитывая, далее, в представлении (2.78) асимптотические равенства (2.62), (2.63), заключаем, что

$$v_k(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon = (\alpha_k - 1)(1 + (|\tau| + 1)O(\varepsilon))\tau, \quad (2.79)$$

где остаток равномерен по  $\tau \in [-1/\sqrt{\varepsilon}, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ .

На заключительном этапе подставим в равенство для  $a(t, \varepsilon)$  (см. (2.71)) выражение (2.79). В результате убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} |\varepsilon a(\tau_1 + h + \varepsilon\tau, \varepsilon) - a_*(\tau)| &\leq M\varepsilon(|\tau| + 1)^2 \exp(-(\alpha_k - 1)|\tau|), \\ -1/\sqrt{\varepsilon} &\leq \tau \leq 1/\sqrt{\varepsilon}, \quad M = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (2.80)$$

где

$$a_*(\tau) = \frac{\exp(-v_0(h)) \exp((\alpha_k - 1)\tau)}{(1 + \exp((\alpha_k - 1)\tau))^2}.$$

Применим затем оценку (2.80) непосредственно к вычислению нужного интеграла:

$$\int_{h + \tau_1(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}}^{h + \tau_1(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}} a(t, \varepsilon) dt = \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} a_*(\tau) d\tau + O(\varepsilon) = \frac{\exp(-v_0(h))}{\alpha_k - 1} + O(\varepsilon).$$

Лемма 2.2 доказана.

Поведение при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения  $\tilde{g}(t, \varepsilon) = (\tilde{g}_1(t, \varepsilon), \tilde{g}_2(t, \varepsilon))$  системы в вариациях (2.65) с произвольной начальной вектор-функцией  $g_0(t) = (g_1^0(t), g_2^0(t))$  из подпространства  $E_0 \subset E$ , задающегося равенством

$$E_0 = \{g_0(t) \in E : g_1^0(-\sigma_0) = g_2^0(-\sigma_0) = 0\}, \quad (2.81)$$

устанавливает

**Лемма 2.3.** *Найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $g_0(t) \in E_0$  имеет место оценка*

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0} (|\tilde{g}_1(t, \varepsilon)| + |\tilde{g}_2(t, \varepsilon)|) \leq M \exp(-q/\varepsilon) \|g_0\|_E \quad (2.82)$$

с универсальными (не зависящими от  $\varepsilon$  и  $g_0$ ) положительными константами  $M, q$ .

**Доказательство.** Рассмотрим сначала отрезок  $-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$ , на котором для компонент решения  $\tilde{g}(t, \varepsilon)$  справедливы явные представления

$$\tilde{g}_1(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t \exp\left(\int_s^t a_0(\sigma, \varepsilon) d\sigma\right) [a_1(s, \varepsilon)g_1^0(s-h) + a_2(s, \varepsilon)g_2^0(s-h)] ds, \quad (2.83)$$

$$\tilde{g}_2(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t \exp\left(\int_s^t b_0(\sigma, \varepsilon) d\sigma\right) [b_1(s, \varepsilon)g_1^0(s-h) + b_2(s, \varepsilon)g_2^0(s-h)] ds. \quad (2.84)$$

Далее, учитывая в равенствах (2.83), (2.84) соответствующие оценки для коэффициентов системы (2.65) (см. оценки (2.74), (2.75)), будем иметь

$$\max_t (|\tilde{g}_1(t, \varepsilon)| + |\tilde{g}_2(t, \varepsilon)|) \leq M \exp(-q/\varepsilon) \|g_0\|_E, \quad (2.85)$$

где  $M, q > 0$  – некоторые универсальные постоянные.

Для распространения оценки вида (2.85) на оставшийся отрезок времени  $[h - \sigma_0, T_k(\varepsilon) - \sigma_0]$  воспользуемся методом шагов. В связи с этим разобьем данный промежуток на отрезки вида  $[h - \sigma_0 + sh, 2h - \sigma_0 + sh]$ ,  $s = \overline{0, s_0}$ , и  $[2h - \sigma_0 + s_0h, T_k(\varepsilon) - \sigma_0]$ , где  $s_0 = \lfloor (T_k(\varepsilon) - 2h)/h \rfloor$ ,  $\lfloor \cdot \rfloor$  – целая часть. Записывая затем аналогичные (2.83), (2.84) равенства на  $s$ -м отрезке и применяя к ним свойство интегральной ограниченности

$$\int_{-\sigma_0}^{T_k(\varepsilon) - \sigma_0} \sum_{j=0}^2 (|a_j(t, \varepsilon)| + |b_j(t, \varepsilon)|) dt \leq M, \quad M = \text{const} > 0$$

(см. неравенства (2.74), (2.75) и представления (2.76), (2.77)), вместе с уже установленными оценками вида (2.85) на предыдущих шагах, получаем требуемую оценку на текущем шаге. Лемма 2.3 доказана.

Рассмотрим теперь вопрос об асимптотическом вычислении мультипликаторов системы (2.65). Для этого обозначим через  $\nu_s(\varepsilon)$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , собственные значения оператора (2.73), занумерованные в порядке убывания модулей. Справедлива

**Лемма 2.4.** *При всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  имеют место соотношения*

$$\nu_1(\varepsilon) \equiv 1, \quad \nu_2(\varepsilon) = \Phi'(z_0) + O(\varepsilon), \quad \sup_{s \geq 3} |\nu_s(\varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon), \quad (2.86)$$

где положительные постоянные  $M, q$  не зависят от  $\varepsilon$ .

**Доказательство.** Введем в рассмотрение конечномерный оператор  $\mathcal{V}_0(\varepsilon)$ , действующий на произвольную функцию  $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) \in E$  по правилу

$$\mathcal{V}_0(\varepsilon)g = \frac{g_1(-\sigma_0)}{\dot{v}_k(-\sigma_0, \varepsilon)} (\dot{v}_k(t, \varepsilon), \dot{w}_k(t, \varepsilon)) + \left( g_2(-\sigma_0) - g_1(-\sigma_0) \frac{\dot{w}_k(-\sigma_0, \varepsilon)}{\dot{v}_k(-\sigma_0, \varepsilon)} \right) g_*(t + T_k(\varepsilon), \varepsilon), \quad (2.87)$$

$$-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0,$$

где  $g_*(t, \varepsilon) = (g_1^*(t, \varepsilon), g_2^*(t, \varepsilon))$  – решение системы (2.65) на отрезке  $-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0$  с начальной функцией  $g_*(t) \equiv (0, 1)$ ,  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ .

Установим связь между операторами (2.73) и (2.87). Для этого рассмотрим функцию

$$\tilde{g}(t, \varepsilon) = g(t, \varepsilon) - \frac{g_1(-\sigma_0)}{\dot{v}_k(-\sigma_0, \varepsilon)} (\dot{v}_k(t, \varepsilon), \dot{w}_k(t, \varepsilon)) - \left( g_2(-\sigma_0) - g_1(-\sigma_0) \frac{\dot{w}_k(-\sigma_0, \varepsilon)}{\dot{v}_k(-\sigma_0, \varepsilon)} \right) g_*(t, \varepsilon), \quad (2.88)$$

где, напомним,  $g(t, \varepsilon)$  – решение системы (2.65), входящее в равенство (2.73). Нетрудно увидеть, что  $\tilde{g}(t, \varepsilon)$  также является решением системы (2.65). Поскольку при  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$

очевидным образом имеем  $\tilde{g}(t, \varepsilon) \in E_0$ , где  $E_0$  – подпространство (2.81), то мы можем применить к функции (2.88) оценку (2.82). Из указанной оценки следует, что для оператора  $\mathcal{W}(\varepsilon) = \mathcal{V}(\varepsilon) - \mathcal{V}_0(\varepsilon)$  справедливо неравенство

$$\|\mathcal{W}(\varepsilon)\|_{E \rightarrow E} \leq M \exp(-q/\varepsilon), \quad (2.89)$$

где  $M, q$  – положительные постоянные.

На следующем этапе доказательства изучим спектральные свойства оператора (2.87). Нетрудно увидеть, что спектр этого оператора состоит из трех точек: собственных значений  $\nu = 1$ ,  $\nu = \nu_*(\varepsilon)$ , где

$$\nu_*(\varepsilon) = g_2^*(T_k(\varepsilon) - \sigma_0, \varepsilon) - g_1^*(T_k(\varepsilon) - \sigma_0, \varepsilon) \frac{\dot{w}_k(-\sigma_0, \varepsilon)}{\dot{v}_k(-\sigma_0, \varepsilon)}, \quad (2.90)$$

и собственного значения  $\nu = 0$  бесконечной кратности. Для собственного значения (2.90), как будет показано ниже, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место асимптотическое равенство

$$\nu_*(\varepsilon) = \Phi'(z_0) + O(\varepsilon), \quad (2.91)$$

где  $\Phi$  – функция (2.21),  $z_0$  – значение (2.23).

Для обоснования соотношения (2.91) необходимо знать асимптотическое поведение решения  $g_*(t, \varepsilon)$ . В связи с этим дополним систему (2.65) начальным условием  $g_*(t) \equiv (0, 1)$  при  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$  и проинтегрируем получившуюся задачу Коши на отрезке времени  $-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0$  методом шагов, учитывая, что коэффициенты  $a_1(t, \varepsilon)$ ,  $b_1(t, \varepsilon)$  изменяются  $\delta$ -образно (см. соотношения (2.68), (2.75)–(2.77)), коэффициенты  $a_2(t, \varepsilon)$ ,  $b_2(t, \varepsilon)$  экспоненциально малы (см. оценки (2.74)), а для  $a_0(t, \varepsilon)$ ,  $b_0(t, \varepsilon)$  справедливы вытекающие из равенств (2.63), (2.66), (2.67) равномерные по  $t \in \Sigma$  асимптотические представления

$$a_0(t, \varepsilon) = a_0(t) + O(\varepsilon), \quad b_0(t, \varepsilon) = b_0(t) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.92)$$

где

$$a_0(t) = \begin{cases} -\alpha_k \exp(-v_0(t)) & \text{при } t \in [-\sigma_0, h) \cup (t_0 + h, T_0 - \sigma_0/2], \\ 0 & \text{при } t \in (h, t_0 + h), \end{cases} \quad a_0(t + T_0) \equiv a_0(t),$$

$$b_0(t) = \begin{cases} -\beta_k \exp(-w_0(t)) & \text{при } t \in [-\sigma_0, h) \cup (t_0 + h, T_0 - \sigma_0/2], \\ 0 & \text{при } t \in (h, t_0 + h), \end{cases} \quad b_0(t + T_0) \equiv b_0(t).$$

В результате убеждаемся в том, что, во-первых,

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0} |g_1^*(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon), \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0} |g_2^*(t, \varepsilon)| \leq M, \quad (2.93)$$

где  $M, q = \text{const} > 0$ ; во-вторых,

$$g_2^*(t, \varepsilon) = \hat{g}(t) + O(\varepsilon), \quad \hat{g}(t) = \exp\left(\int_{-\sigma_0}^t b_0(s) ds\right) \quad (2.94)$$

равномерно по  $t \in \Sigma$ . Асимптотическое представление (2.91) очевидным образом следует из равенств (2.90), (2.93), (2.94) и соотношений

$$\hat{g}(T_0 - \sigma_0) = \exp\left(\int_{-\sigma_0}^{T_0 - \sigma_0} b_0(s) ds\right) = \exp\left(\int_0^{T_0} b_0(s) ds\right) = \Phi'(z_0).$$

Рассмотрим теперь исходный оператор  $\mathcal{V}(\varepsilon)$  и заметим, что в силу равенств

$$\mathcal{V}(\varepsilon) = \mathcal{V}_0(\varepsilon) + \mathcal{W}(\varepsilon), \quad (\nu I - \mathcal{V}(\varepsilon))^{-1} = (I - (\nu I - \mathcal{V}_0(\varepsilon))^{-1} \mathcal{W}(\varepsilon))^{-1} (\nu I - \mathcal{V}_0(\varepsilon))^{-1},$$

где  $I$  – единичный оператор, любое значение  $\nu \in \mathbb{C}$ , для которого

$$\|(\nu I - \mathcal{V}_0(\varepsilon))^{-1} \mathcal{W}(\varepsilon)\|_{E \rightarrow E} < 1, \quad (2.95)$$

принадлежит резольвентному множеству этого оператора. Напомним, далее, что оператор  $\mathcal{W}(\varepsilon)$  допускает оценку (2.89). В случае же оператора  $(\nu I - \mathcal{V}_0(\varepsilon))^{-1}$  из соотношений (2.87), (2.93) выводим неравенство

$$\|(\nu I - \mathcal{V}_0(\varepsilon))^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(1 + |\nu|^2)}{|\nu| |\nu - 1| |\nu - \nu_*(\varepsilon)|}, \quad \nu \in \mathbb{C}, \quad \nu \neq 0, 1, \nu_*(\varepsilon), \quad (2.96)$$

где  $M$  – положительная постоянная.

На завершающем этапе доказательства леммы 2.4 объединим оценки (2.89), (2.96) с асимптотическим представлением (2.91). В результате убеждаемся в том, что любая точка  $\nu \in \mathbb{C}$  из множества  $\mathbb{C} \setminus \{O_1 \cup O_2 \cup O_3\}$ , где

$$O_1 = \{\nu : |\nu - 1| < \exp(-q_1/\varepsilon)\}, \quad O_2 = \{\nu : |\nu - \nu_*(\varepsilon)| < \exp(-q_2/\varepsilon)\}, \quad (2.97)$$

$$O_3 = \{\nu : |\nu| < \exp(-q_3/\varepsilon)\},$$

а постоянные  $q_1, q_2, q_3 > 0$  подходящим образом малы, удовлетворяет условию (2.95) и, следовательно, является регулярной для оператора  $\mathcal{V}(\varepsilon)$ . Спектр этого оператора заведомо принадлежит шарам (2.97).

Заметим, что собственные значения  $\nu = 1$  и  $\nu = \nu_*(\varepsilon)$  оператора  $\mathcal{V}_0(\varepsilon)$  являются простыми, поскольку в силу равенств (2.29), (2.91) имеем  $\nu_*(\varepsilon) \in (0, 1)$ . Тем самым и у оператора  $\mathcal{V}(\varepsilon)$  в шарах  $O_1, O_2$  лежит ровно по одному простому собственному значению  $\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)$  соответственно. Более того, для  $\nu_2(\varepsilon)$  очевидным образом сохраняется асимптотическое представление вида (2.91), а  $\nu_1(\varepsilon) \equiv 1$  (напомним, что система (2.65) – линеаризация на цикле (1.9)). Остальные собственные значения  $\nu_s(\varepsilon)$ ,  $s \geq 3$ , оператора  $\mathcal{V}(\varepsilon)$  лежат в шаре  $O_3$ , а значит, допускают требуемую экспоненциальную оценку из (2.86). Лемма 2.4 доказана.

Итак, мы убедились в том, что, за исключением простого единичного, все мультипликаторы системы (2.65) находятся в круге  $\{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| < 1\}$ . Тем самым цикл (1.9) системы (1.7) является экспоненциально орбитально устойчивым (в метрике фазового пространства  $E$ ). Теорема 1.1 доказана.

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

**3.1. Устойчивость режимов двухкластерной синхронизации.** Перейдем теперь к вопросу об устойчивости режимов двухкластерной синхронизации из семейства  $\mathcal{U}_k$ , порожденного циклом (1.9). Как отмечено в п. 1, все эти режимы имеют одинаковые свойства устойчивости. Поэтому достаточно рассмотреть только один из них, отвечающий символному вектору (1.13). Линеаризуя на нем исходную систему (1.4), приходим к линейной системе

$$\dot{g}_j = \tilde{a}_0(t, \varepsilon) g_j + \tilde{a}_1(t, \varepsilon) g_j(t-h) + \tilde{a}_2(t, \varepsilon) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^k g_s(t-h) + \tilde{a}_3(t, \varepsilon) \sum_{s=k+1}^m g_s(t-h), \quad 1 \leq j \leq k, \quad (3.1)$$

$$\dot{g}_j = \tilde{b}_0(t, \varepsilon) g_j + \tilde{b}_1(t, \varepsilon) g_j(t-h) + \tilde{b}_2(t, \varepsilon) \sum_{s=1}^k g_s(t-h) + \tilde{b}_3(t, \varepsilon) \sum_{\substack{s=k+1 \\ s \neq j}}^m g_s(t-h), \quad k+1 \leq j \leq m, \quad (3.2)$$



где

$$\tilde{a}_0(t, \varepsilon) = a_0(t, \varepsilon), \quad \tilde{a}_1(t, \varepsilon) = -\alpha a(t, \varepsilon), \quad \tilde{a}_2(t, \varepsilon) = -\beta a(t, \varepsilon), \quad \tilde{a}_3(t, \varepsilon) = \frac{\beta}{\beta_{m-k}} a_2(t, \varepsilon), \quad (3.3)$$

$$\tilde{b}_0(t, \varepsilon) = b_0(t, \varepsilon), \quad \tilde{b}_1(t, \varepsilon) = \frac{\alpha}{\alpha_{m-k}} b_2(t, \varepsilon), \quad (3.4)$$

$$\tilde{b}_2(t, \varepsilon) = -\beta b(t, \varepsilon), \quad \tilde{b}_3(t, \varepsilon) = \frac{\beta}{\alpha_{m-k}} b_2(t, \varepsilon),$$

а функции  $a_0(t, \varepsilon)$ ,  $b_0(t, \varepsilon)$ ,  $a(t, \varepsilon)$ ,  $b(t, \varepsilon)$ ,  $a_2(t, \varepsilon)$ ,  $b_2(t, \varepsilon)$  введены ранее (см. равенства (2.66)–(2.72)).

Как оказывается, при подходящей замене переменных система (3.1), (3.2) принимает блочную структуру: распадается на одну двумерную и  $m - 2$  одномерных подсистем.

Действительно, положим

$$e_{0,0} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-k}), \quad e_{0,1} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-k}), \quad (3.5)$$

$$e_{1,s} = (1, 0, \dots, 0, \underbrace{-1, 0, \dots, 0}_{s+1}), \quad s = \overline{1, k-1}, \quad (3.6)$$

$$e_{2,s} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k+1}, \underbrace{-1}_{k+1+s}, 0, \dots, 0), \quad s = \overline{1, m-k-1} \quad (3.7)$$

(нижние подписи в (3.6), (3.7) обозначают номера соответствующих координат). Далее, обратим внимание, что векторы (3.5)–(3.7) образуют базис в  $\mathbb{R}^m$ . Поэтому мы можем выполнить в системе (3.1), (3.2) замену переменных

$$\text{col}(g_1, \dots, g_m) = c_{0,0}(t)e_{0,0} + c_{0,1}(t)e_{0,1} + \sum_{s=1}^{k-1} c_{1,s}(t)e_{1,s} + \sum_{s=1}^{m-k-1} c_{2,s}(t)e_{2,s}. \quad (3.8)$$

В результате убеждаемся в том, что пара коэффициентов  $(c_{0,0}(t), c_{0,1}(t))$  из (3.8) удовлетворяет линейной системе (2.65). Группа коэффициентов  $c_{1,s}(t)$ ,  $s = \overline{1, k-1}$ , является решениями одного и того же скалярного уравнения

$$\dot{c} = \tilde{a}_0(t, \varepsilon)c + (\tilde{a}_1(t, \varepsilon) - \tilde{a}_2(t, \varepsilon))c(t-h). \quad (3.9)$$

Аналогично для коэффициентов  $c_{2,s}(t)$ ,  $s = \overline{1, m-k-1}$ , приходим к уравнению

$$\dot{c} = \tilde{b}_0(t, \varepsilon)c + (\tilde{b}_1(t, \varepsilon) - \tilde{b}_3(t, \varepsilon))c(t-h). \quad (3.10)$$

Свойства устойчивости системы (2.65) изучены в п. 2.2. Вопрос же о расположении мультипликаторов уравнения (3.10) тривиален, так как в силу вытекающей из (3.4), (2.74) оценки

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0} (|\tilde{b}_1(t, \varepsilon)| + |\tilde{b}_3(t, \varepsilon)|) \leq M \exp(-q/\varepsilon), \quad M, q = \text{const} > 0,$$

оно экспоненциально близко к обыкновенному уравнению  $\dot{c} = \tilde{b}_0(t, \varepsilon)c$ . Тем самым, учитывая соотношения (3.4), (2.92), заключаем, что ровно один мультипликатор уравнения (3.10) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к пределу  $\Phi'(z_0) \in (0, 1)$ . Остальные же его мультипликаторы лежат в круге  $\{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \leq M \exp(-q/\varepsilon)\}$ ,  $M, q$  – положительные постоянные.

Из сказанного выше следует, что вопрос устойчивости периодических режимов двухкластерной синхронизации семейства  $\mathcal{U}_k$  сводится к исследованию расположения мультипликаторов уравнения (3.9). Заметим, далее, что при  $k = 1$  множество векторов (3.6) пусто, и необходимость в рассмотрении этого уравнения отпадает. Тем самым все  $m$  циклов семейства

$\mathcal{U}_1$  экспоненциально орбитально устойчивы. В случае же  $2 \leq k \leq m-1$  вопрос об устойчивости решает

**Лемма 3.1.** Пусть  $\nu_s(\varepsilon)$ ,  $s \geq 1$ , – мультипликаторы уравнения (3.9), занумерованные в порядке убывания модулей. Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  мультипликатор  $\nu_1(\varepsilon)$  является простым и допускает при  $\varepsilon \rightarrow 0$  асимптотическое представление

$$\nu_1(\varepsilon) = \nu_1^0 + O(\varepsilon), \quad \nu_1^0 = \frac{1 + (\beta - \alpha) \exp h}{\alpha_k \exp h - 1} \frac{\alpha_k - 1 + (\beta - \alpha) \exp h}{\alpha_k (\exp h - 1) + 1}. \quad (3.11)$$

Остальные же мультипликаторы  $\nu_s(\varepsilon)$ ,  $s \geq 2$ , лежат в круге  $\{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \leq M \exp(-q/\varepsilon)\}$ , где  $M, q$  – положительные постоянные.

**Доказательство.** Поскольку обоснование леммы 3.1 во многом аналогично доказательству леммы 2.4, то опустим некоторые технические детали.

В первую очередь отметим свойства решения  $\tilde{c}(t, \varepsilon)$  уравнения (3.9) с произвольной начальной функцией  $c_0(t) \in C[-h - \sigma_0, -\sigma_0]$ ,  $c_0(-\sigma_0) = 0$ . Для упомянутого решения справедлива аналогичная (2.82) оценка

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0} |\tilde{c}(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon) \max_{-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |c_0(t)| \quad (3.12)$$

с универсальными константами  $M, q > 0$  (доказательство этого факта аналогично обоснованию леммы 2.3).

На следующем этапе введем в рассмотрение оператор монодромии  $U(\varepsilon)$  уравнения (3.9), действующий на произвольную функцию  $c(t) \in C[-h - \sigma_0, -\sigma_0]$  по правилу

$$U(\varepsilon)c = c(t + T_k(\varepsilon), \varepsilon), \quad -h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (3.13)$$

где  $c(t, \varepsilon)$  – решение уравнения (3.9) на отрезке  $-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0$  с начальной функцией  $c(t)$ ,  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ . Рассмотрим также конечномерный оператор

$$V(\varepsilon)c = c(-\sigma_0)c_*(t + T_k(\varepsilon), \varepsilon), \quad -h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (3.14)$$

где  $c_*(t, \varepsilon)$  – решение уравнения (3.9) с начальным условием  $c_* \equiv 1$  при  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ . Как и при доказательстве леммы 2.4, учитывая оценку (3.12), заключаем, что для оператора  $W(\varepsilon) = U(\varepsilon) - V(\varepsilon)$  справедливо неравенство

$$\|W(\varepsilon)\|_{C[-h - \sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-h - \sigma_0, -\sigma_0]} \leq M \exp(-q/\varepsilon), \quad (3.15)$$

где  $M, q$  – положительные постоянные.

Исследуем спектральные свойства оператора (3.14). Нетрудно увидеть, что его спектр состоит из двух точек: собственного значения  $\nu = \nu_*(\varepsilon)$ ,  $\nu_*(\varepsilon) = c_*(T_k(\varepsilon) - \sigma_0, \varepsilon)$ , и собственного значения  $\nu = 0$  бесконечной кратности. Более того, для  $\nu_*(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливо асимптотическое представление

$$\nu_*(\varepsilon) = \nu_1^0 + O(\varepsilon), \quad (3.16)$$

где  $\nu_1^0$  – постоянная из (3.11).

Для доказательства равенства (3.16) выявим асимптотическое поведение решения  $c_*(t, \varepsilon)$ . Для этого дополним уравнение (3.9) начальным условием  $c_* \equiv 1$ ,  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$  и проинтегрируем его на отрезке времени  $-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0$  методом шагов, принимая во внимание известное асимптотическое поведение его коэффициентов (см. (3.3), (2.75)–(2.77), (2.92)). В итоге убеждаемся в справедливости соотношений

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_k(\varepsilon) - \sigma_0} |c_*(t, \varepsilon)| \leq M, \quad \max_{t \in \Sigma} |c_*(t, \varepsilon) - c_*(t)| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.17)$$

где  $c_*(t)$ ,  $t \geq -\sigma_0$ , – решение импульсной задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{c} &= a_0(t)c, \quad c|_{t=-\sigma_0} = 1, \\ \delta c(t)|_{t=h} &= \frac{(\beta - \alpha) \exp(-v_0(h))}{\alpha_k - 1} c(0), \quad \delta c(t)|_{t=t_0+h} = (\beta - \alpha) \exp(h) c(t_0), \end{aligned}$$

в которой  $\delta c(t) \stackrel{\text{def}}{=} c(t+0) - c(t-0)$ . Остается добавить, что требуемое асимптотическое равенство (3.16) вытекает из соотношений (3.17) и равенства  $c_*(T_0 - \sigma_0) = \nu_1^0$ , проверяемого интегрированием приведенной импульсной задачи (соответствующие вполне понятные выкладки опустим).

Для завершения доказательства леммы 3.1 заметим, что в силу представления (3.16) и неравенства  $\nu_1^0 > 0$  собственное значение  $\nu = \nu_*(\varepsilon)$  оператора  $V(\varepsilon)$  является простым. Далее, объединяя оценку (3.15) с вытекающим из соотношений (3.14), (3.16), (3.17) неравенством

$$\|(\nu I - V(\varepsilon))^{-1}\|_{C[-h-\sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-h-\sigma_0, -\sigma_0]} \leq \frac{M(1 + |\nu|)}{|\nu| |\nu - \nu_*(\varepsilon)|}, \quad \nu \in \mathbb{C}, \quad \nu \neq 0, \nu_*(\varepsilon), \quad (3.18)$$

где  $M$  – положительная постоянная, убеждаемся в том (по аналогии с доказательством леммы 2.4), что при возмущении оператора  $V(\varepsilon)$  экспоненциально малой добавкой  $W(\varepsilon)$  собственное значение  $\nu_*(\varepsilon)$  перейдет в простое собственное значение  $\nu_1(\varepsilon)$  (с сохранением для него асимптотического представления (3.16)). Остальные собственные значения оператора (3.13), согласно неравенствам (3.15), (3.18), лежат в круге  $\{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \leq M \exp(-q/\varepsilon)\}$ ,  $M, q$  – положительные постоянные. Лемма 3.1 доказана.

Подводя итог, отметим, что теперь у нас есть вся информация, необходимая для завершения доказательства теоремы 1.2. Действительно, из явного выражения для  $\nu_1^0$  (см. (3.11)) вытекает, что неравенство  $\nu_1^0 > 1$  эквивалентно требованию

$$h < \ln \frac{\alpha_k}{\alpha_k - (\beta - \alpha)}. \quad (3.19)$$

Однако условие (3.19) в нашем случае заведомо выполняется в силу оценки (1.8) и очевидного неравенства  $\beta_k/\alpha_k < \alpha_k/(\alpha_k + \alpha - \beta)$ . Отсюда и из леммы 3.1 следует, что все периодические режимы двухкластерной синхронизации, принадлежащие семейству  $\mathcal{U}_k$ , в случае  $2 \leq k \leq m - 1$  экспоненциально неустойчивы. Теорема 1.2 доказана.

**3.2. Заключение.** Отметим, что помимо найденных выше устойчивых периодических режимов двухкластерной синхронизации из семейства  $\mathcal{U}_1$  система (1.4) может иметь и другие аттракторы. Простейшим из них является периодический режим однокластерной синхронизации или однородный цикл, для которого  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = x_*(t, \varepsilon)$ , а  $x_*(t, \varepsilon)$  – периодическое решение вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = -1 + \alpha_m \exp(-x)/\Omega(x(t-h), \varepsilon) \quad (3.20)$$

периода  $T_*(\varepsilon)$ . Аналогом теоремы 1.1 здесь является

**Теорема 3.1.** Пусть выполнены условия из (1.3) на  $\alpha, \beta$ , а запаздывание  $h > 0$  произвольно фиксировано. Тогда найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  уравнение (3.20) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл  $x_*(t, \varepsilon)$ ,  $x_*(0, \varepsilon) \equiv 0$ , периода  $T_*(\varepsilon)$  с асимптотикой

$$\max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - v_0(t)| = O(\varepsilon), \quad T_*(\varepsilon) = T_0 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где  $T_0, v_0(t)$  задаются равенствами (2.9), (2.12) при  $k = m$ .

На доказательстве сформулированной теоремы не останавливаемся, поскольку оно аналогично обоснованию теоремы 1.1.

Вопрос об устойчивости однородного цикла связан с рассмотрением аналогичной (3.1), (3.2) линейной системы

$$\dot{g}_j = \tilde{a}_0(t, \varepsilon)g_j + \tilde{a}_1(t, \varepsilon)g_j(t-h) + \tilde{a}_2(t, \varepsilon) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m g_s(t-h), \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.21)$$

коэффициенты которой задаются аналогичными (3.3) равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(t, \varepsilon) &= -\frac{\alpha_m \exp(-x_*(t, \varepsilon))}{\Omega(x_*(t-h, \varepsilon), \varepsilon)}, \quad \tilde{a}_1(t, \varepsilon) = -\alpha a(t, \varepsilon), \quad \tilde{a}_2(t, \varepsilon) = -\beta a(t, \varepsilon), \\ a(t, \varepsilon) &= \frac{\exp(-x_*(t, \varepsilon))}{\Omega^2(x_*(t-h, \varepsilon), \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{x_*(t-h, \varepsilon)}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Анализ системы (3.21) проводится по той же схеме, что и в случае системы (3.1), (3.2), т.е. сначала убеждаемся в том, что после аналогичной (3.8) замены переменных она распадается на  $m$  независимых скалярных уравнений. Одно из них получается из уравнения (3.20) при линеаризации на цикле  $x_*(t, \varepsilon)$ , а остальные  $m-1$  одинаковы и имеют вид (3.9) с коэффициентами (3.22). Сохраняется здесь и аналог леммы 3.1 (с заменой в формуле для  $\nu_1^0$  из (3.11) индекса  $k$  на  $m$ ). Тем самым справедлива

**Теорема 3.2.** *Однородный цикл системы (1.4) экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) при*

$$h - \ln \frac{\alpha_m}{\alpha_m - (\beta - \alpha)} > 0 \quad (< 0).$$

Кроме того, при условии  $\alpha_m/(\alpha_m + \alpha - \beta) < \beta_1/\alpha_1$  и  $\alpha_m/(\alpha_m + \alpha - \beta) < h < \beta_1/\alpha_1$  устойчивый однородный цикл сосуществует с устойчивыми циклами двухкластерной синхронизации из семейства  $\mathcal{U}_1$ .

Добавим еще, что выше нами найдены лишь самые простые периодические режимы двухкластерной синхронизации, компонента  $v$  которых знакопеременна, а другая компонента  $w$  строго положительна. Однако, как показывает численный анализ, у системы (1.4) при  $m \geq 9$  могут существовать и устойчивые режимы двухкластерной синхронизации, обе компоненты  $v$  и  $w$  которых знакопеременны. Кроме того, численно удалось обнаружить устойчивые периодические режимы  $s$ -кластерной синхронизации при  $s = 3, 4$ . Исследование упомянутых режимов представляет собой отдельную задачу, которая пока не решена.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Фадеев С.И. Задачи теории функционирования генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. 6. № 2. С. 64–80.
2. Демиденко Г.В., Колчанов Н.А., Лихошвай В.А. и др. Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 12. С. 2276–2295.
3. Фадеев С.И., Лихошвай В.А. О гипотетических генных сетях // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. 6. № 3. С. 134–153.
4. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Реле с запаздыванием и его  $C^1$ -аппроксимация // Тр. Мат. ин-та РАН. 1997. Т. 216. С. 126–153.
5. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2099–2112.
6. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 919–932.

Ярославский государственный университет  
им. П.Г. Демидова,  
Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию  
03.11.2015 г.