

УДК 517.926

## Автоволновые процессы в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов

С. Д. Глызин<sup>1,2</sup>, А. Ю. Колесов<sup>1,3</sup>, Н. Х. Розов<sup>4</sup>

Поступило в феврале 2014 г.

Вводится в рассмотрение математическая модель континуальной кольцевой цепочки однонаправленно связанных генераторов. Таковой является некоторая нелинейная краевая задача гиперболического типа, получающаяся в пределе из кольцевой цепочки однонаправленно связанных обыкновенных дифференциальных уравнений при неограниченном увеличении числа звеньев. Исследуется вопрос об аттракторах указанной краевой задачи. С помощью сочетания аналитических и численных методов устанавливается реализуемость в ней одной из двух альтернатив: феномена буферности (неограниченного накопления устойчивых периодических движений) или хаотических аттракторов сколь угодно высоких ляпуновских размерностей.

**DOI:** 10.1134/S0371968514020071

### 1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В простейшем варианте кольцевая цепочка однонаправленно связанных генераторов моделируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u}_j = F(u_j) + mD(u_{j+1} - u_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad u_{m+1} = u_1. \quad (1.1)$$

Здесь  $m \geq 2$ , точкой обозначено дифференцирование по  $t$ ;  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ; вектор-функция  $F(u)$  принадлежит классу  $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ;  $D$  — квадратная матрица размера  $n \times n$ . Как правило, предполагается, что соответствующая цепочке (1.1) парциальная система

$$\dot{u} = F(u) \quad (1.2)$$

имеет единственный аттрактор — состояние равновесия или цикл.

Исследование цепочек вида (1.1) актуально в связи с различными приложениями к радиоп физике [1–5] и нейродинамике [6–8]. В частности, представляет интерес поведение аттракторов таких цепочек при неограниченном увеличении числа звеньев  $m$ . В настоящей работе данный вопрос изучается в случае, когда в рамках парциальной системы (1.2) происходит бифуркация Андронова–Хопфа, а матрица связи  $D$  подходящим образом мала.

При условии  $m \gg 1$  вполне естественно перейти от дискретной цепочки (1.1) к соответствующей распределенной модели. Процедура указанного перехода состоит в аппроксимации величины  $j/m$  непрерывным индексом  $x \in [0, 1] \pmod{1}$  и замене слагаемого  $m(u_{j+1} - u_j)$  в (1.1) на производную  $\partial u / \partial x$ . В результате получаем краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u) + D \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(t, x+1) \equiv u(t, x), \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия.

<sup>2</sup>E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

<sup>3</sup>E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

<sup>4</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: fpo.mgu@mail.ru

представляющую собой математическую модель континуальной кольцевой цепочки односторонне связанных генераторов.

Будем рассматривать задачу (1.3) как эволюционное уравнение в банаховом пространстве  $E$ , элементами которого являются периодические с периодом 1 вектор-функции  $u(x)$  класса  $W_2^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ . Норму в  $E$  зададим равенством

$$\|u\|_E = \left( \int_0^1 \|u(x)\|^2 dx + \int_0^1 \|u'(x)\|^2 dx \right)^{1/2};$$

здесь и ниже одним и тем же символом  $\|\cdot\|$  обозначаются евклидовы нормы в пространствах  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{C}^n$ , а также соответствующие этим нормам индуцированные матричные нормы. Далее, введем в рассмотрение замкнутый неограниченный оператор  $L = Dd/dx: E \rightarrow E$  с плотной в  $E$  областью определения  $E(L)$ . Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Оператор  $L$  является генератором полугруппы  $\exp(Lt)$ ,  $t \geq 0$ , класса  $C_0$  линейных ограниченных в  $E$  операторов в том и только том случае, когда весь спектр матрицы  $D$  лежит на вещественной оси и в пространстве  $\mathbb{R}^n$  существует базис из ее собственных векторов.*

**Доказательство.** Заметим, что если полугруппа  $\exp(Lt)$  существует, то ее действие на любой элемент  $u(x) \in E$  с необходимостью задается рядом Фурье

$$\exp(Lt)u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(2\pi i k D t) u_k \exp(2\pi i k x), \quad (1.4)$$

где

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \exp(2\pi i k x), \quad u_k = \int_0^1 u(x) \exp(-2\pi i k x) dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

В свою очередь, правая часть равенства (1.4) порождает в пространстве  $E$  линейный ограниченный оператор в том и только том случае, когда

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|\exp(i\tau D)\| < \infty.$$

Остается добавить, что это условие эквивалентно двум требованиям: вещественности спектра матрицы  $D$  и существованию у нее полного набора собственных векторов. Лемма 1 доказана.

Установленная лемма свидетельствует о том, что при  $m \rightarrow \infty$  цепочка (1.1) отнюдь не всегда порождает корректную краевую задачу (1.3). В связи с этим естественным образом возникает ограничение на матрицу  $D$ . А именно, всюду ниже считаем, что все ее собственные значения вещественны и просты. Тогда мы заведомо находимся в рамках применимости леммы 1, а значит, для вектор-функции  $v(t) = u(t, \cdot) \in E$  получается корректное абстрактное полулинейное дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = Lv + \mathcal{F}(v), \quad \mathcal{F}(v(t)) \stackrel{\text{def}}{=} F(u(t, \cdot)). \quad (1.6)$$

Добавим еще, что фигурирующий в (1.6) оператор суперпозиции  $\mathcal{F}: E \rightarrow E$  в силу известной теоремы о регулярности (см. [9]) бесконечно дифференцируем по Фреше и ограничен на любом ограниченном подмножестве  $\Omega \subset E$  вместе с любым конечным числом своих производных.

Наличие полугруппы (1.4) позволяет определить для уравнения (1.6) понятие *обобщенного решения* с произвольным начальным условием

$$v(0) = v_0 \quad (1.7)$$

из  $E$ . А именно, таковым будем называть непрерывную вектор-функцию  $v(t)$  со значениями в  $E$ , удовлетворяющую на некотором отрезке  $0 \leq t \leq \bar{t}$  интегральному уравнению

$$v(t) = \exp(Lt)v_0 + \int_0^t \exp(L(t-s))\mathcal{F}(v(s)) ds. \quad (1.8)$$

Пусть теперь  $v_0 \in E(L)$ . Тогда *классическим решением* задачи Коши (1.6), (1.7) назовем такую непрерывно дифференцируемую (в метрике  $E$ ) на некотором отрезке  $0 \leq t \leq \bar{t}$  вектор-функцию  $v = v(t)$ , что, во-первых,  $v(t) \in E(L)$  и  $Lv(t)$  непрерывна при каждом  $t \in [0, \bar{t}]$ , а во-вторых, функция  $v(t)$  на рассматриваемом отрезке удовлетворяет уравнению (1.6), а при  $t = 0$  — начальному условию (1.7). Ясно, что любое классическое решение является одновременно и решением интегрального уравнения (1.8).

Общая теория абстрактных полулинейных дифференциальных уравнений содержится, например, в монографиях [10, 11]. Приведенные там факты свидетельствуют о том, что свойства этих уравнений во многом аналогичны свойствам обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, справедлива следующая серия лемм.

**Лемма 2.** *По любому ограниченному множеству  $\Omega \subset E$  можно указать такое  $t_0 = t_0(\Omega) > 0$ , что каждое обобщенное решение  $v = v(t, v_0)$ ,  $v(0, v_0) = v_0$ , уравнения (1.6) с начальным условием  $v_0 \in \Omega$  однозначно определено на отрезке  $0 \leq t \leq t_0$  и непрерывно по  $(t, v_0) \in [0, t_0] \times \Omega$ . В случае же  $v_0 \in \Omega \cap E(L)$  данное решение при всех  $t \in [0, t_0]$  будет классическим.*

**Лемма 3.** *Пусть задано произвольное (вообще говоря, обобщенное) решение  $v = v_*(t)$  уравнения (1.6) на некотором отрезке  $0 \leq t \leq \bar{t}$ . Тогда найдется такое достаточно малое  $r_0 > 0$ , что любое обобщенное решение  $v = v(t, v_0)$  этого уравнения с начальным условием  $v(0, v_0) = v_0 \in B$ ,  $B = \{v \in E: \|v - v_*(0)\|_E \leq r_0\}$ , существует на отрезке  $0 \leq t \leq \bar{t}$  и непрерывно по совокупности переменных  $(t, v_0) \in [0, \bar{t}] \times B$ . Если же дополнительно  $v_0 \in E(L)$ , то соответствующее решение  $v(t, v_0)$  при всех  $t \in [0, \bar{t}]$  оказывается классическим.*

**Лемма 4.** *Для любого обобщенного решения  $v = v_*(t)$ , определенного на отрезке  $0 \leq t \leq \bar{t}$ , найдется такая последовательность классических решений  $v = v_k(t)$ ,  $k \geq 1$ ,  $t \in [0, \bar{t}]$ , что*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|v_*(t) - v_k(t)\|_E = 0.$$

Перед формулировкой заключительной леммы для каждого обобщенного решения  $v(t)$  уравнения (1.6) с начальным условием (1.7) определим так называемый максимальный полуинтервал существования  $[0, t_{\max})$ , где

$$t_{\max} = \sup\{t_0: v(t) \text{ существует на отрезке } t \in [0, t_0]\}. \quad (1.9)$$

Согласно лемме 2 множество значений  $t_0$ , по которым берется супремум в (1.9), заведомо непусто. Ясно также, что любое решение  $v(t)$  однозначно продолжается на свой максимальный полуинтервал  $[0, t_{\max})$ , причем не исключен случай  $t_{\max} = +\infty$ . Если же оказалось, что  $t_{\max} < +\infty$ , то справедлива

**Лемма 5.** *Предположим, что для некоторого обобщенного решения  $v(t)$  уравнения (1.6) конечна величина (1.9). Тогда выполняется предельное равенство*

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max} - 0} \|v(t)\|_E = +\infty.$$

По поводу обоснования приведенных лемм отсылаем к статье [12], где изложены доказательства аналогичных результатов.

В дальнейшем при некоторых дополнительных ограничениях на матрицу  $D$  и нелинейность  $F(u)$  будем интересоваться аттракторами нелинейного полупотока, порожденного обобщенными решениями уравнения (1.6) в фазовом пространстве  $E$ .

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Конкретизируем постановку проблемы. В связи с этим обратимся к аналогичной (1.3) краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}(D_0 + \sqrt{\varepsilon}D_1)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(t, x+1) \equiv u(t, x), \quad (2.1)$$

где  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ ;  $\varepsilon > 0$  — малый параметр; вектор-функция  $F(u, \varepsilon)$  бесконечно дифференцируема по совокупности переменных  $(u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , и такова, что  $F(0, \varepsilon) \equiv 0$ .

Для формулировки последующих ограничений нам потребуется тейлоровское разложение вектор-функции  $F(u, \varepsilon)$  в точке  $(u, \varepsilon) = (0, 0)$ , имеющее вид

$$F(u, \varepsilon) = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + O(\varepsilon^2 \|u\| + \varepsilon \|u\|^2 + \|u\|^4), \quad (2.2)$$

где  $A_0, A_1$  — квадратные матрицы размера  $n \times n$ ;  $F_2, F_3$  — квадратичная и кубическая симметричные формы со значениями в  $\mathbb{R}^n$ .

**Условие 1.** Предполагаем, что матрица  $A_0$  из (2.2) имеет простую пару чисто мнимых собственных значений  $\lambda = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ , которой отвечают собственные векторы  $a$  и  $\bar{a}$ , нормированные условиями  $(a, b) = 1$ ,  $(\bar{a}, b) = 0$  (здесь и далее черта — комплексное сопряжение,  $(\cdot, \cdot)$  — евклидово скалярное произведение в  $\mathbb{C}^n$ , а вектор  $b$  таков, что  $A_0^* b = -i\omega_0 b$ ). Остальные же собственные значения матрицы  $A_0$  считаем лежащими в левой комплексной полуплоскости  $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ .

**Условие 2.** Выполняются неравенства  $\operatorname{Re}(A_1 a, b) > 0$ ,  $\operatorname{Re} d < 0$ , где

$$d = 2(F_2(\chi_0, a), b) + 2(F_2(\chi_2, \bar{a}), b) + 3(F_3(a, a, \bar{a}), b), \quad (2.3)$$

$$\chi_0 = -2A_0^{-1}F_2(a, \bar{a}), \quad \chi_2 = [2i\omega_0 I - A_0]^{-1}F_2(a, a), \quad (2.4)$$

а через  $I$  обозначена единичная матрица.

Отметим, что условия 1, 2 в совокупности гарантируют реализуемость в парциальной системе

$$\dot{u} = F(u, \varepsilon) \quad (2.5)$$

классической бифуркации Андронова–Хопфа. Действительно, из результатов монографий [9, 10] вытекает существование у системы (2.5) при этих условиях и при всех  $0 < \varepsilon \ll 1$  устойчивого цикла амплитуды порядка  $\sqrt{\varepsilon}$  с частотой, близкой к  $\omega_0$ . Подчеркнем, что этот цикл является одновременно и решением краевой задачи (2.1), не зависящим от пространственной переменной  $x$ . Такой цикл будем называть *пространственно однородным* или просто *однородным*.

Следующее ограничение касается фигурирующих в (2.1) матриц связи  $D_0$  и  $D_1$ .

**Условие 3.** Считаем, что матрица  $D_1$  произвольна, а  $D_0$  имеет простые собственные значения  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , которым отвечают собственные векторы  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Предполагаем, что эти собственные векторы нормированы условиями  $(e_k, g_k) = 1$ , где  $D_0^* g_k = \lambda_k g_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Для формулировки заключительного ограничения линеаризуем краевую задачу (2.1) на нулевом состоянии равновесия и применим к получившейся линейной краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + \sqrt{\varepsilon}(D_0 + \sqrt{\varepsilon}D_1)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(t, x + 1) \equiv u(t, x)$$

метод Фурье по системе функций  $\exp(2\pi kix)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , т.е. подставим в нее соотношения (1.5). В результате для переменных  $u_k$  приходим к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_k = (A_0 + \varepsilon A_1 + iz(D_0 + \sqrt{\varepsilon}D_1))u_k, \quad z = 2\pi k\sqrt{\varepsilon}.$$

Устойчивость этих уравнений очевидным образом связана со спектральными свойствами матрицы

$$\mathcal{D}(z) = A_0 + izD_0, \tag{2.6}$$

где параметр  $z$ , принимающий дискретные значения  $2\pi k\sqrt{\varepsilon}$ , для удобства будем считать непрерывно меняющимся на полуоси  $z \geq 0$  (случай  $z < 0$  не нуждается в отдельном рассмотрении, так как  $\mathcal{D}(-z) \equiv \overline{\mathcal{D}(z)}$ ).

Остановимся сначала на некоторых свойствах матрицы (2.6), вытекающих из условий 1, 3.

Заметим, во-первых, что в силу условия 1 при всех достаточно малых значениях параметра  $z$  эта матрица имеет собственные значения  $\lambda_1(z)$ ,  $\lambda_2(z)$ :  $\lambda_1(z) = \overline{\lambda_2(-z)}$ ,  $\lambda_1(0) = i\omega_0$ . Далее, несложный подсчет показывает, что для  $\lambda_1(z)$  в точке  $z = 0$  справедливо тейлоровское разложение

$$\lambda_1(z) = i\omega_0 + \lambda_{1,1}z + \lambda_{1,2}z^2 + \dots, \quad \lambda_{1,1} = i(D_0a, b), \quad \lambda_{1,2} = i(D_0a_1, b), \tag{2.7}$$

где  $a_1$  — решение линейной системы

$$(A_0 - i\omega_0 I)a_1 = i(D_0a, b)a - iD_0a, \tag{2.8}$$

нормированное условием  $(a_1, b) = 0$ .

Во-вторых, согласно условию 3 при  $z \gg 1$  собственные значения  $\lambda_k(z)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , матрицы (2.6) допускают асимптотику

$$\lambda_k(z) = iz\lambda_k + (A_0e_k, g_k) + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad k = 1, \dots, n, \tag{2.9}$$

где, напомним,  $\lambda_k$  — собственные значения матрицы  $D_0$ .

**Условие 4.** Предполагаем, что

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,1} = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0, \quad (A_0e_k, g_k) < 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.10}$$

Считаем также, что при любом  $z > 0$  матрица (2.6) является гурвицевой.

Обращаем внимание, что при малых  $z$  и при  $z \gg 1$  гурвицевость матрицы  $\mathcal{D}(z)$  автоматически вытекает из условий 1, 3 и соотношений (2.10). В случае же  $z \sim 1$  данное свойство приходится постулировать. Следует также отметить, что фигурирующее в (2.10) требование  $\operatorname{Re} \lambda_{1,1} = 0$  описывает некоторую особенность. В связи с этим становится понятной роль матрицы  $D_1$  из (2.1) — она характеризует отход от указанной особенности.

Отдельного рассмотрения заслуживает вопрос о реализуемости условий 1–4. Отметим сразу, что последнее из них заведомо не выполняется при  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$ . Действительно, в двумерном случае имеем  $\operatorname{Re}[\operatorname{tr} \mathcal{D}(z)] = 0$ , а значит, матрица  $\mathcal{D}(z)$  не может быть гурвицевой.

Однако уже при  $n = 3$  ситуация иная. Для того чтобы убедиться в этом, в качестве вектор-функции  $F(u, \varepsilon)$  и матрицы  $D_0$  в (2.1) возьмем

$$F(u, \varepsilon) = (A_0 + \varepsilon A_1)u + G(u), \quad u = (u_1, u_2, u_3)^T, \quad G(u) = -(u_1^3, u_2^3, u_3^3)^T, \quad (2.11)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.12)$$

здесь и ниже символом  $(\cdot)^T$  обозначается операция транспонирования.

Нетрудно проверить, что в случае (2.11), (2.12) собственные значения матрицы  $A_0$  задаются равенствами  $\lambda = -3$ ,  $\lambda = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 = \sqrt{3}$  и

$$a = \left(1, -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^T, \quad b = \frac{1}{3} \left(1, -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^T. \quad (2.13)$$

Далее, опираясь на соотношения (2.13), убеждаемся, что  $(A_1 a, b) = (1 + i\sqrt{3})/2$ ,  $d = -3$ . Таким образом, выполняются условия 1–3 и соответствующая группа неравенств (2.10), связанная с векторами  $e_k, g_k$  (все ограничения на матрицу  $D_0$  в данном случае справедливы автоматически).

Для проверки оставшихся требований, касающихся матрицы (2.6), обратимся к ее характеристическому уравнению, имеющему вид

$$(\lambda + 1)^3 + z^2(\lambda + 1) + 8 = 0. \quad (2.14)$$

Заметим, что в случае (2.14) для коэффициентов разложений (2.7), (2.9) справедливы равенства

$$\lambda_{1,1} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1-i\sqrt{3}}{12}, \quad (A_0 e_k, g_k) = -1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Что же касается самого полинома (2.14), то при всех  $z > 0$  он очевидным образом является гурвицевым.

Поставим вопрос о существовании и устойчивости у краевой задачи (2.1) при условиях 1–4 так называемых автоволновых процессов, т.е. стационарных режимов, нетривиально зависящих от пространственной переменной  $x$ . Обыгрывая факт существования у системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $\dot{u} = A_0 u$  периодических решений  $a \exp(i\omega_0 t)$ ,  $\bar{a} \exp(-i\omega_0 t)$ , асимптотику этих режимов будем искать в виде ряда

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(t, \tau, s, x) + \varepsilon u_1(t, \tau, s, x) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, \tau, s, x) + \dots \quad (2.15)$$

по целым степеням  $\sqrt{\varepsilon}$ . Здесь  $\tau = \sqrt{\varepsilon} t$ ,  $s = \varepsilon t$ ,

$$u_0 = \xi(\tau, s, x) a \exp(i\omega_0 t) + \bar{\xi}(\tau, s, x) \bar{a} \exp(-i\omega_0 t), \quad (2.16)$$

$\xi(\tau, s, x)$ ,  $\bar{\xi}(\tau, s, x) \equiv \xi(\tau, s, x)$ , — пока произвольная (подлежащая определению в последующем) комплексная амплитуда, а функции  $u_k(t, \tau, s, x)$ ,  $k = 1, 2$ , — некоторые тригонометрические полиномы переменной  $\omega_0 t$  с векторными коэффициентами, зависящими от  $\tau, s, x$ .

Для отыскания функций  $u_k(t, \tau, s, x)$ ,  $k = 1, 2$ , подставим в (2.1) соотношения (2.15), (2.16) вместе с тейлоровским разложением (2.2) и будем последовательно приравнивать коэффициенты при  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^{3/2}$  в левой и правой частях получившегося выражения. В результате приходим к линейным неоднородным уравнениям вида

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = A_0 u_k + \gamma_k(t, \tau, s, x), \quad k = 1, 2, \quad (2.17)$$

в которых переменные  $\tau, s, x$  рассматриваются как параметры.

При  $k = 1$  неоднородность в (2.17) задается равенством

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & \gamma_{1,0}(\tau, s, x) + \gamma_{1,1}(\tau, s, x) \exp(i\omega_0 t) + \bar{\gamma}_{1,1}(\tau, s, x) \exp(-i\omega_0 t) + \\ & + \gamma_{1,2}(\tau, s, x) \exp(2i\omega_0 t) + \bar{\gamma}_{1,2}(\tau, s, x) \exp(-2i\omega_0 t), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$\gamma_{1,0} = 2|\xi|^2 F_2(a, \bar{a}), \quad \gamma_{1,1} = D_0 a \frac{\partial \xi}{\partial x} - a \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \quad \gamma_{1,2} = \xi^2 F_2(a, a). \quad (2.19)$$

Что же касается функции  $u_1(t, \tau, s, x)$ , то ее ищем в виде аналогичной (2.18) суммы нулевой, первых и вторых гармоник с коэффициентами  $\beta_{1,r}$ ,  $r = 0, 1, 2$ . На этом пути для указанных коэффициентов выходят линейные неоднородные системы

$$(ir\omega_0 I - A_0)\beta_{1,r} = \gamma_{1,r}, \quad r = 0, 1, 2. \quad (2.20)$$

Отметим сразу, что в силу условия 1 на спектр матрицы  $A_0$  в случае  $r = 0, 2$  эти системы однозначно разрешимы.

Новые моменты возникают при  $r = 1$ . Действительно, поскольку матрица  $A_0$  имеет простые собственные значения  $\lambda = \pm i\omega_0$ , соответствующая система (2.20) оказывается вырожденной. Условие же ее разрешимости записывается в виде

$$(\gamma_{1,1}, b) = 0. \quad (2.21)$$

Учитывая далее в (2.21) явную формулу для  $\gamma_{1,1}$  (см. (2.19)) и тот факт, что в силу условия 4 величина  $(D_0 a, b)$  является вещественной, приходим к выводу, что амплитуда  $\xi(\tau, s, x)$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \varkappa \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \varkappa = (D_0 a, b) \in \mathbb{R}.$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\xi = \xi(s, y), \quad y = \varkappa \tau + x. \quad (2.22)$$

На завершающем этапе подставим соотношения (2.22) в равенства (2.19). В результате окажутся разрешимыми все системы (2.20), а для функции  $u_1$  получится в итоге формула

$$\begin{aligned} u_1 = & -ia_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} \exp(i\omega_0 t) + i\bar{a}_1 \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \exp(-i\omega_0 t) + \chi_0 |\xi|^2 + \\ & + \chi_2 \xi^2 \exp(2i\omega_0 t) + \bar{\chi}_2 \bar{\xi}^2 \exp(-2i\omega_0 t), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $a_1$  — решение системы (2.8),  $\chi_0, \chi_2$  — векторы (2.4).

При  $k = 2$  из равенства

$$\gamma_2 = A_1 u_0 + 2F_2(u_0, u_1) + F_3(u_0, u_0, u_0) + D_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + D_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - \frac{\partial u_0}{\partial s}$$

и соотношений (2.16), (2.23) вытекает, что неоднородность  $\gamma_2$  — линейная комбинация гармоник  $\exp(\pm r i \omega_0 t)$ ,  $r = 0, 1, 2, 3$ . В том же виде ищем и функцию  $u_2$ . На этом пути для ее коэффициентов при гармониках с номерами  $r = 0, 2, 3$  получаются невырожденные линейные неоднородные системы вида (2.20). В случае же  $r = 1$  возникает аналогичное (2.21) условие

разрешимости, которое будем рассматривать как уравнение для отыскания имеющейся в запасе комплексной амплитуды  $\xi(s, y)$ . В результате убеждаемся, что эта амплитуда является решением краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = -i(D_0 a_1, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + (D_1 a, b) \frac{\partial \xi}{\partial y} + (A_1 a, b) \xi + d |\xi|^2 \xi, \quad \xi(s, y+1) \equiv \xi(s, y), \quad (2.24)$$

где  $d$  — величина (2.3). Подчеркнем, что в силу неравенства  $\operatorname{Re}[-i(D_0 a_1, b)] > 0$  (см. условие 4) данная задача оказывается параболической.

Следуя установившейся традиции, получившуюся краевую задачу (2.24) будем называть *квазинормальной формой исходной задачи* (2.1) или просто *квазинормальной формой*. В данном случае подобное название оправдано тем, что при  $D_0 = D_1 = 0$  уравнение из (2.24) представляет собой укороченную нормальную форму системы (2.5) на устойчивом двумерном инвариантном многообразии. Если же  $D_0 \neq 0$ , то у краевой задачи (2.1) аналогичного инвариантного многообразия не существует, а вывод задачи (2.24) приобретает сугубо формальный характер. Действительно, при ее получении отбрасывались слагаемые хотя и малые по порядку относительно  $\varepsilon$ , но по силе не являющиеся подчиненными остальным.

Несмотря на все сказанное выше, квазинормальная форма (2.24) все же содержит некоторую информацию об аттракторах исходной задачи (2.1). Перед формулировкой соответствующих строгих результатов дадим два определения.

**Определение 1.** *Автомодельным циклом задачи (2.24) типа бегущей волны* или просто *бегущей волной* будем называть ее периодическое решение вида

$$\xi(s, y) = \xi_0 \exp[2\pi i(\sigma s + p y)], \quad (2.25)$$

где  $\xi_0, \sigma = \operatorname{const} \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 2.** *Двумерным автомодельным тором задачи (2.24)* назовем ее квазипериодическое решение вида

$$\xi(s, y) = \xi_0(\sigma_1 s + y) \exp(2\pi i \sigma_2 s), \quad (2.26)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2 = \operatorname{const} \in \mathbb{R}$ , а  $\xi_0(y)$  — некоторая периодическая с периодом 1 комплекснозначная функция. Предполагаем, естественно, что решение (2.26) не приводится к виду (2.25).

Справедливы следующие два стандартных утверждения о соответствии между решениями (2.25), (2.26) квазинормальной формы и аналогичными стационарными режимами задачи (2.1).

**Теорема 1.** *Предположим, что квазинормальная форма (2.24) имеет некоторый автомодельный цикл вида (2.25), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный (в метрике фазового пространства  $(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Im} \xi) \in W_2^1 \times W_2^1$ , где  $W_2^1$  — соболевское пространство 1-периодических функций). Тогда для любого натурального  $l$  найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_l > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_l$  исходная краевая задача (2.1) допускает цикл типа бегущей волны с теми же свойствами устойчивости, задающийся равенствами*

$$u = \sqrt{\varepsilon} \xi_0 [\exp(2\pi i(\theta + p x)) a + \exp(-2\pi i(\theta + p x)) \bar{a}] + \varepsilon \mathcal{U}(\theta + p x, \varepsilon), \quad (2.27)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega_0}{2\pi} + \sqrt{\varepsilon} p \kappa + \varepsilon \sigma + \varepsilon^{3/2} \Delta(\varepsilon).$$

Здесь  $\xi_0, \sigma, p$  — постоянные из (2.25),  $\kappa$  — константа из (2.22),  $\Delta(\varepsilon)$  — ограниченная функция  $\varepsilon$ , а вектор-функция  $\mathcal{U}(\theta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{U}(\theta + 1, \varepsilon) \equiv \mathcal{U}(\theta, \varepsilon)$ , непрерывна и ограничена на множестве  $(\theta, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_l]$  вместе со своими частными производными по  $\theta$  до порядка  $l$  включительно.



**Теорема 2.** *Каждому автомодельному тору (2.26) квазинормальной формы (2.24), экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному, в исходной задаче (2.1) при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  отвечает двумерный инвариантный тор с теми же свойствами устойчивости. Для этого тора справедливо аналогичное (2.27) параметрическое представление*

$$u = \sqrt{\varepsilon} [\xi_0(\theta_1 + x) \exp(2\pi i \theta_2) a + \bar{\xi}_0(\theta_1 + x) \exp(-2\pi i \theta_2) \bar{a}] + \varepsilon \mathcal{U}(\theta_1 + x, \theta_2, \varepsilon),$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \sqrt{\varepsilon} \kappa + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^{3/2} \Delta_1(\theta_2, \varepsilon), \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\omega_0}{2\pi} + \varepsilon \sigma_2 + \varepsilon^{3/2} \Delta_2(\theta_2, \varepsilon),$$
(2.28)

где функции  $\mathcal{U}$ ,  $\Delta_j$ ,  $j = 1, 2$ , периодически (с периодом 1) зависят от фазовых переменных  $\theta_1, \theta_2$ , а также непрерывны и ограничены по  $(\theta_1, \theta_2, \varepsilon)$  вместе с любым фиксированным числом производных по  $(\theta_1, \theta_2)$ .

Обращаем внимание, что специальная зависимость от  $x$  в (2.28) и отсутствие у функций  $\Delta_j$ ,  $j = 1, 2$ , аргумента  $\theta_1$  обусловлены инвариантностью данного тора по отношению к поворотной симметрии, т.е. к заменам  $x \rightarrow x + c$ ,  $\theta_1 \rightarrow \theta_1 - c$ , где  $c$  — произвольное вещественное число.

Доказательство сформулированных теорем проводится с помощью методов, содержащихся в статье [13] и монографии [14]. Следует отметить, что хотя эти методы изначально были разработаны для параболических уравнений, но они пригодны и для гиперболической краевой задачи (2.1). Связано это с характером поведения спектра устойчивости ее нулевого состояния равновесия (т.е. с характером расположения собственных значений матрицы (2.6)), который аналогичен описанному в [13, 14].

### 3. АТТРАКТОРЫ КВАЗИНОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Для удобства дальнейшего анализа приведем краевую задачу (2.24) к некоторому каноническому виду. С этой целью, принимая во внимание неравенства  $\text{Re}(A_1 a, b) > 0$ ,  $\text{Re} d < 0$  (см. условие 2), выполним в ней последовательно замены

$$\xi \exp(-i \text{Im}(A_1 a, b) s) \rightarrow \xi, \quad y + \text{Re}(D_1 a, b) s \rightarrow y, \quad \text{Re}(A_1 a, b) s \rightarrow s,$$

$$\xi = \sqrt{-\frac{\text{Re}(A_1 a, b)}{\text{Re} d}} w, \quad s \rightarrow t, \quad y \rightarrow x.$$

В результате приходим к модельной краевой задаче

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \left( (1 - ic_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ic_2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w - (1 + ic_3) |w|^2 w, \quad w(t, x + 1) \equiv w(t, x),$$
(3.1)

где

$$\nu = \frac{\text{Re}[-i(D_0 a_1, b)]}{\text{Re}(A_1 a, b)} > 0, \quad c_1 = -\frac{\text{Im}[-i(D_0 a_1, b)]}{\text{Re}[-i(D_0 a_1, b)]} \in \mathbb{R},$$

$$c_2 = \frac{\text{Im}(D_1 a, b)}{\text{Re}[-i(D_0 a_1, b)]} \in \mathbb{R}, \quad c_3 = \frac{\text{Im} d}{\text{Re} d} \in \mathbb{R}.$$
(3.2)

Обращаем внимание, что задача (3.1) всегда имеет однородный цикл

$$w = \exp(-ic_3 t).$$
(3.3)

Этот цикл является частным случаем бегущей волны, т.е. содержится в семействе циклов вида

$$w = w_p \exp(i\sigma_p t + 2\pi p i x),$$
(3.4)

где  $w_p, \sigma_p = \text{const} \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Вопрос о существовании и устойчивости таких циклов актуален в связи с теоремой 1. Ответ на него содержится в следующем утверждении.

**Теорема 3.** Пусть при некотором  $p \in \mathbb{Z}$  справедливо условие

$$1 - 2\nu p(2\pi p + c_2) > 0. \quad (3.5)$$

Тогда краевая задача (3.1) допускает бегущую волну (3.4) с номером  $p$ , амплитуда и частота которой задаются формулами

$$w_p = \sqrt{1 - 2\nu p(2\pi p + c_2)}, \quad \sigma_p = 4\pi^2 p^2 \nu c_1 - c_3 w_p^2. \quad (3.6)$$

Соответствующий цикл (3.4), (3.6) экспоненциально орбитально устойчив при выполнении серии неравенств

$$\begin{aligned} (w_p^2 + 4\nu\pi^2 k^2)^2 [2w_p^2(1 - c_1 c_3) + 4\nu\pi^2 k^2(1 + c_1^2) - \nu(4\pi p + c_2)^2] > \\ > \nu(4\pi p + c_2)^2 (-w_p^2 c_3 + 4\nu\pi^2 k^2 c_1)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

и неустойчив при строгом нарушении хотя бы одного из них.

**Доказательство.** Непосредственная проверка показывает, что при условии (3.5) требуемая бегущая волна действительно существует. Для исследования ее устойчивости выполним в (3.1) замену

$$w = (1 + h)w_p \exp(i\sigma_p t + 2\pi p i x)$$

и отбросим нелинейные по  $h, \bar{h}$  слагаемые. В результате приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \left[ (1 - ic_1) \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 4\pi i p \frac{\partial h}{\partial x} \right) + ic_2 \frac{\partial h}{\partial x} \right] - (1 + ic_3) w_p^2 (h + \bar{h}), \quad (3.8)$$

$$h(t, x + 1) \equiv h(t, x).$$

Далее дополним уравнение из (3.8) уравнением для  $\bar{h}$  и, считая  $h, \bar{h}$  независимыми комплексными переменными  $h_1, h_2$ , подставим в получившуюся систему для  $h_1, h_2$  соотношения

$$h_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{1,k} \exp(2\pi k i x), \quad h_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2,k} \exp(2\pi k i x).$$

На этом пути для переменных  $v_k = (v_{1,k}, v_{2,k})^T$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , выходят двумерные системы вида  $\dot{v}_k = \Lambda_k v_k$  с матрицами

$$\Lambda_k = -w_p^2 \begin{pmatrix} 1 + ic_3 & 1 + ic_3 \\ 1 - ic_3 & 1 - ic_3 \end{pmatrix} + \nu \text{diag}\{\delta_{1,k}, \delta_{2,k}\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.9)$$

где

$$\delta_{1,k} = -(1 - ic_1)(4\pi^2 k^2 + 8\pi^2 p k) - 2\pi k c_2, \quad \delta_{2,k} = -(1 + ic_1)(4\pi^2 k^2 - 8\pi^2 p k) + 2\pi k c_2.$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что за устойчивость интересующей нас бегущей волны отвечает расположение спектра данных матриц.

Нетрудно заметить, что при  $k = 0$  одно собственное значение матрицы (3.9) нулевое (это естественно, так как (3.8) — линеаризация на цикле), а второе отрицательно. Что же касается остальных матриц (3.9), то необходимые и достаточные условия их гурвицевости имеют вид (3.7). Теорема 3 доказана.

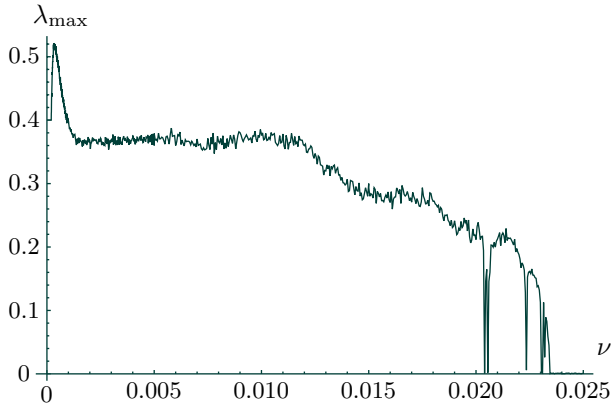


Рис. 1

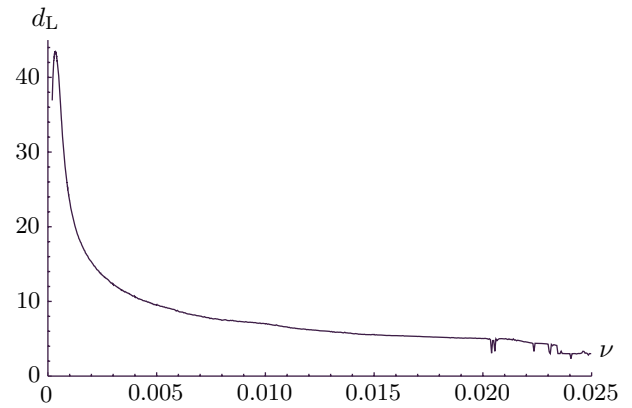


Рис. 2

Анализ условий (3.5), (3.7) при  $0 < \nu \ll 1$  и при фиксированных  $c_1, c_2, c_3$  показывает, что в этом случае у краевой задачи (3.1) существуют бегущие волны (3.4), (3.6) с номерами  $p = 0, \pm 1, \dots, \pm p_0$ , где  $p_0$  — любое наперед заданное фиксированное натуральное число. Все эти циклы одновременно устойчивы (неустойчивы) при выполнении неравенства  $c_1 c_3 - 1 < 0 (> 0)$ . А отсюда и из теоремы 1 следует, что в исходной краевой задаче (2.1) при увеличении величины  $\text{Re}(A_1 a, b)$  (в силу (3.2) это эквивалентно уменьшению параметра  $\nu$ ) и при  $c_1 c_3 < 1$  реализуется феномен буферности: происходит неограниченное накопление устойчивых циклов вида (2.27).

Сделаем еще два полезных наблюдения. Первое из них касается однородного цикла (3.3). Из условий (3.7) нетрудно вывести, что в случае  $\nu \gg 1$  и  $c_j \sim 1, j = 1, 2, 3$ , этот цикл устойчив (неустойчив) при  $|c_2| - 2\pi < 0 (> 0)$ . Второе же наблюдение относится к случаю  $\nu, c_1, c_3 \sim 1, c_1 c_3 > 1$  и  $|c_2| \gg 1$ . Анализ условий (3.7) приводит к выводу, что в данной ситуации неустойчивы все доставляемые теоремой 3 бегущие волны (3.4), (3.6).

Итак, наиболее интересный диапазон параметров  $c_1, c_2, c_3$  выделяется неравенствами

$$c_1 c_3 > 1, \quad |c_2| > 2\pi. \tag{3.10}$$

Действительно, при их выполнении краевая задача (3.1) имеет нетривиальную динамику как при  $\nu \gg 1$  (ее однородный цикл (3.3) заведомо неустойчив), так и при  $\nu \ll 1$  (неустойчивы все существующие бегущие волны). Как будет показано ниже с помощью численного анализа, при фиксированных  $c_j, j = 1, 2, 3$ , удовлетворяющих неравенствам (3.10), и при  $\nu \ll 1$  задача (3.1) допускает хаотический аттрактор  $A_\nu$ , ляпуновская размерность  $d_L(A_\nu)$  которого (вычисляющаяся по известной формуле Каплана–Йорке [15]) стремится к бесконечности при  $\nu \rightarrow 0$ . Аналогичным образом неограниченный рост размерности хаотического аттрактора наблюдается при  $\nu, c_1, c_3 \sim 1, c_1 c_3 > 1$  и при увеличении  $|c_2|$ .

Для описания соответствующих численных экспериментов введем в рассмотрение точки  $x = j/N, j = 1, \dots, N$ , где  $N$  — произвольно фиксированное натуральное число, и заменим в (3.1) частные производные по  $x$  в указанных точках соответствующими симметричными разностями. В результате для переменных  $w_j(t) = w(t, x)|_{x=j/N}$  приходим к конечномерной модели

$$\dot{w}_j = \nu \left[ (1 - ic_1)N^2(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) + \frac{ic_2 N(w_{j+1} - w_{j-1})}{2} \right] + w_j - (1 + ic_3)|w_j|^2 w_j, \tag{3.11}$$

$$j = 1, \dots, N, \quad w_0(t) = w_N(t), \quad w_{N+1}(t) = w_1(t).$$

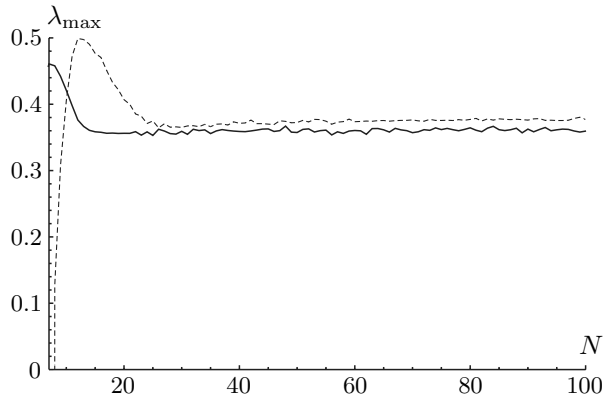


Рис. 3

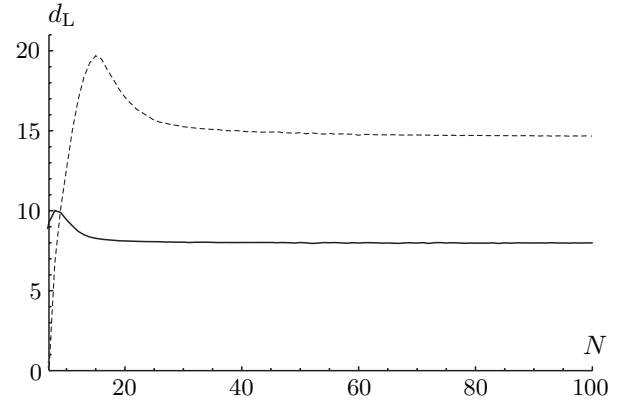


Рис. 4

Как оказывается, при значениях параметров

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 8, \quad c_3 = 4, \quad (3.12)$$

удовлетворяющих неравенствам (3.10), и при уменьшении  $\nu$  в системе (3.11) возникает хаотический аттрактор  $A_\nu(N)$ . Наглядное представление об этом процессе дают графики по  $\nu$  старшего ляпуновского показателя  $\lambda_{\max}(A_\nu(N))$  и ляпуновской размерности  $d_L(A_\nu(N))$  данного аттрактора. При  $N = 30$  соответствующие графики, построенные на промежутке  $0 \leq \nu \leq 0.025$  по точкам с шагом 0.00005, представлены на рис. 1, 2. Характерной особенностью зависимости  $d_L(A_\nu(N))$  от  $\nu$  является наличие максимума при малых  $\nu$ . Связано это с тем, что при фиксированном  $N$  и при  $\nu \rightarrow 0$  в разностной модели (3.11) происходит упрощение аттракторов (появляются устойчивые бегущие волны, аналоги которых отсутствуют в распределенной модели (3.1)). Тем самым при излишне малых  $\nu$  разностная модель перестает адекватно описывать динамику задачи (3.1). Отметим еще, что с ростом  $N$  упомянутый максимум сдвигается к нулю, а значение  $d_L(A_\nu(N))$  в точке максимума неограниченно растет.

На следующем этапе убедимся, что при увеличении  $N$  аттрактор  $A_\nu(N)$  разностной модели (3.11) в определенном смысле сходится к аттрактору  $A_\nu$  краевой задачи (3.1). Действительно, численные расчеты для фиксированных  $\nu$  показывают, что при увеличении  $N$  происходит стабилизация величин  $\lambda_{\max}(A_\nu(N))$  и  $d_L(A_\nu(N))$ . На рис. 3, 4 изображены графики их зависимости от  $N$  при  $5 \leq N \leq 100$  для  $\nu = 0.007$  и  $\nu = 0.002$  (сплошные линии соответствуют случаю  $\nu = 0.007$ , а штриховые — случаю  $\nu = 0.002$ ). Существенным здесь является то обстоятельство, что меньшим значениям параметра  $\nu$  отвечают большие значения  $d_L$ . Таким образом, есть все основания ожидать, что при  $\nu \rightarrow 0$  и при наборе параметров (3.12) размерность  $d_L(A_\nu)$  хаотического аттрактора  $A_\nu$  краевой задачи (3.1) неограниченно растет.

Аналогичный вывод о неограниченном росте размерности хаотического аттрактора краевой задачи (3.1) справедлив при  $c_1 = 1$ ,  $c_3 = 4$ ,  $\nu = 1$  и при уменьшении величины  $\alpha = 1/c_2 > 0$ . Для того чтобы убедиться в этом, приведем для указанных значений параметров результаты численного анализа системы

$$\dot{w}_j = \frac{i\nu N(w_{j+1} - w_{j-1})}{2} - (1 + ic_3)|w_j|^2 w_j + \alpha[\nu(1 - ic_1)N^2(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) + w_j], \quad (3.13)$$

$$j = 1, \dots, N,$$

получающейся из (3.11) после замен  $w_j/\sqrt{c_2} \rightarrow w_j$ ,  $c_2 t \rightarrow t$ .

Как и в предыдущем случае, при малых  $\alpha$  система (3.13) допускает хаотический аттрактор  $A_\alpha(N)$ . При  $N = 30$  зависимости от  $\alpha$  его старшего ляпуновского показателя  $\lambda_{\max}$  и

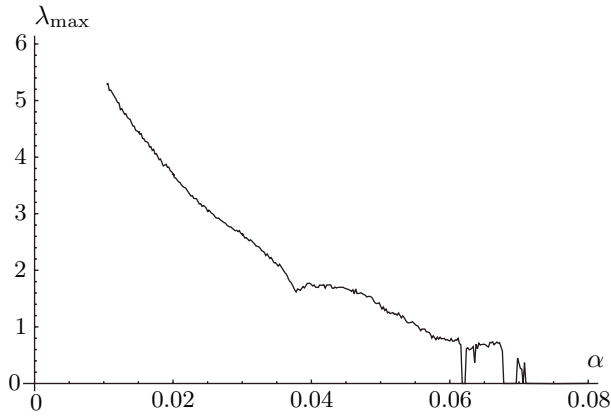


Рис. 5

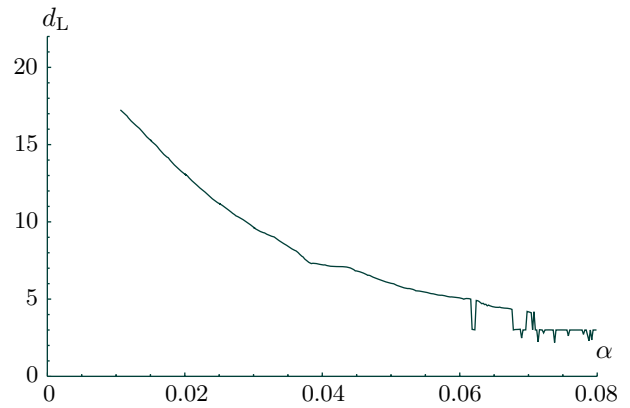


Рис. 6

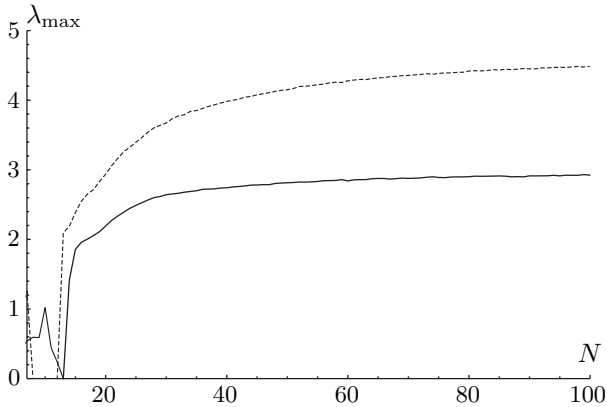


Рис. 7

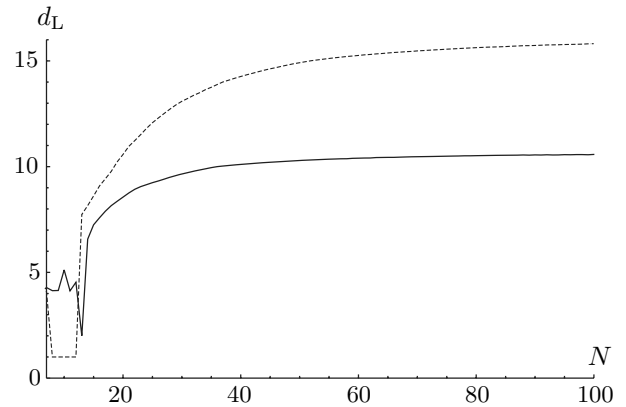


Рис. 8

ляпуновской размерности  $d_L$  изображены на рис. 5, 6. Построение этих графиков проводилось на промежутке  $0.01 \leq \alpha \leq 0.08$  по точкам с шагом 0.0001. Отрезок  $0 \leq \alpha \leq 0.01$  не рассматривался, поскольку при фиксированном  $N$  и излишне малых  $\alpha$  разностная модель (3.13) перестает быть адекватной непрерывной модели (3.1) (происходит разрушение хаоса и появление устойчивых бегущих волн, аналоги которых в непрерывной модели неустойчивы). Далее, на рис. 7, 8 показаны графики зависимости величин  $\lambda_{\max}$ ,  $d_L$  от  $N$  при  $5 \leq N \leq 100$  для  $\alpha = 0.03$  и  $\alpha = 0.02$  (сплошная и штриховая линии соответственно). Приведенная информация свидетельствует в пользу гипотезы о том, что  $d_L(A_\alpha) \rightarrow +\infty$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , где  $A_\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} A_\alpha(N)$ ,  $N \rightarrow \infty$ , — аттрактор исходной краевой задачи (3.1) при  $c_1 = 1$ ,  $c_3 = 4$ ,  $\nu = 1$ ,  $\alpha = 1/c_2$ .

Завершая описание результатов численного счета, добавим, что при значениях параметров (3.12) и при всех  $\nu \geq 0.1$  задача (3.1) имеет устойчивый автомодельный двумерный тор вида (2.26). Таким образом, убеждаемся, что область применимости теоремы 2 заведомо не пуста.

#### 4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Причина, по которой в (2.1) порядок малости матрицы связи был выбран равным  $\sqrt{\varepsilon}$ , продиктована спектральными свойствами матрицы (2.6). Такой порядок связи позволил применить к краевой задаче (2.1) известный метод квазинормальных форм и получить строгие результаты о соответствии между специальными стационарными режимами краевых задач (2.24) и (2.1). Аналогичное соответствие между хаотическими аттракторами указанных задач не

установлено, но есть все основания ожидать, что оно также имеет место. В рамках данной гипотезы, опираясь на проделанные выше аналитические и численные исследования, мы получаем достаточно полное представление о локальной динамике краевой задачи (2.1) в окрестности нулевого положения равновесия. Основные особенности этой динамики — реализуемость при соответствующем выборе параметров одной из двух альтернатив: феномена буферности или хаотического аттрактора сколь угодно большой ляпуновской размерности.

Интересно отметить, что условия 1–4 позволяют изучить вопрос о существовании и устойчивости бегущих волн для более общей, чем (2.1), краевой задачи. А именно рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, \varepsilon) + \mu(D_0 + \sqrt{\varepsilon}D_1)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(t, x+1) \equiv u(t, x), \quad (4.1)$$

получающуюся из (2.1) при замене множителя  $\sqrt{\varepsilon}$  перед матрицей связи  $D_0 + \sqrt{\varepsilon}D_1$  на  $\mu$ , где  $\mu > 0$  — не зависящий от  $\varepsilon$  дополнительный малый параметр.

Как и ранее, *бегущей волной* будем называть периодическое решение задачи (4.1) вида

$$u = u(\theta)|_{\theta=\sigma t+px}, \quad \sigma = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (4.2)$$

Здесь вектор-функция  $u(\theta)$ ,  $u(\theta+1) \equiv u(\theta)$ , удовлетворяет уравнению

$$[\sigma I - \sqrt{\varepsilon}\delta(D_0 + \sqrt{\varepsilon}D_1)]\frac{du}{d\theta} = F(u, \varepsilon), \quad (4.3)$$

где  $\delta = \mu p/\sqrt{\varepsilon}$ . Однако при исследовании вопроса о существовании бегущих волн (4.2) удобно считать параметр  $\delta$  в (4.3) непрерывно меняющимся на некотором отрезке  $[\delta_1, \delta_2]$ .

Предположим, что при  $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$  существует пара функций

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \delta), \quad u = u(\theta, \varepsilon, \delta), \quad u(\theta+1, \varepsilon, \delta) \equiv u(\theta, \varepsilon, \delta), \quad (4.4)$$

обращающих уравнение (4.3) в тождество. Тогда, как нетрудно заметить, исходная краевая задача (4.1) допускает серию бегущих волн

$$u = u(\theta, \varepsilon, \delta)|_{\theta=\sigma_p(\varepsilon, \mu)t+px, \delta=\mu p/\sqrt{\varepsilon}}, \quad \sigma_p(\varepsilon, \mu) = \sigma(\varepsilon, \delta)|_{\delta=\mu p/\sqrt{\varepsilon}}, \quad (4.5)$$

с номерами

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}\delta_1}{\mu} \leq p \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}\delta_2}{\mu}. \quad (4.6)$$

Отметим еще, что в случае  $\mu/\sqrt{\varepsilon} \ll 1$  количество целых  $p$ , удовлетворяющих неравенствам (4.6), асимптотически велико (имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}/\mu$ ).

Итак, проблема существования бегущих волн сводится к отысканию функций (4.4). Для формулировки соответствующего строгого результата введем в рассмотрение квадратичный полином

$$R(\delta) = \text{Re}(A_1 a, b) + 2\pi\delta \text{Re}[i(D_1 a, b)] + 4\pi^2\delta^2 \text{Re}[i(D_0 a, b)] \quad (4.7)$$

и заметим, что в силу неравенств  $\text{Re}(A_1 a, b) > 0$ ,  $\text{Re}[i(D_1 a, b)] < 0$  (см. условия 2, 4) он имеет два корня  $\delta = \delta_* < 0$ ,  $\delta = \delta_{**} > 0$ .

**Теорема 4.** *По любому отрезку  $[\delta_1, \delta_2] \subset (\delta_*, \delta_{**})$  можно указать такое достаточно малое  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_1, \delta_2) > 0$ , что при всех  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_2$  существует пара функций (4.4), достаточно гладко зависящих от переменных  $\sqrt{\varepsilon}$ ,  $\delta$ ,  $\theta$  и удовлетворяющих системе (4.3). Для этих функций справедливы тейлоровские разложения вида*

$$u(\theta, \varepsilon, \delta) = \sqrt{\varepsilon}\xi_0 [a \exp(2\pi i\theta) + \bar{a} \exp(-2\pi i\theta)] + O(\varepsilon), \quad \sigma(\varepsilon, \delta) = \frac{\omega_0}{2\pi} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.8)$$

где  $\xi_0 = \sqrt{-R(\delta)/\text{Re}d}$ ,  $d$  — величина (2.3).

**Доказательство.** Изложим сначала алгоритм построения асимптотики функций (4.4). В связи с этим подставим в систему (4.3) ряды по целым степеням  $\sqrt{\varepsilon}$ :

$$\sigma = \sigma_0 + \sqrt{\varepsilon}\sigma_1 + \varepsilon\sigma_2 + \dots, \quad u = \sqrt{\varepsilon}u_0(\theta) + \varepsilon u_1(\theta) + \varepsilon^{3/2}u_2(\theta) + \dots, \quad (4.9)$$

где  $\sigma_0 = \omega_0/(2\pi)$ ,  $u_0 = \xi_0[a \exp(2\pi i\theta) + \bar{a} \exp(-2\pi i\theta)]$ , а амплитуда  $\xi_0 \in \mathbb{R}$  пока произвольна. Привлекая далее тейлоровское разложение (2.2) и приравнявая в левой и правой частях получившегося выражения коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , приходим к рекуррентной последовательности линейных неоднородных систем вида

$$\sigma_0 \frac{du_k}{d\theta} = A_0 u_k + f_k(\theta), \quad k \geq 1. \quad (4.10)$$

Неизвестные же постоянные  $\sigma_1, \sigma_2, \xi_0$  и т.д. определяем из условий разрешимости этих уравнений в классе тригонометрических многочленов переменной  $2\pi\theta$ .

При  $k = 1$  в силу равенства  $f_1(\theta) = F_2(u_0, u_0) + \delta D_0 du_0/d\theta - \sigma_1 du_0/d\theta$  неоднородность  $f_1$  представляет собой линейную комбинацию гармоник  $\exp(\pm 2\pi i r\theta)$ ,  $r = 0, 1, 2$ . В том же виде ищем и функцию  $u_1$ . В результате для ее коэффициентов при данных гармониках получаем аналогичные (2.20) линейные неоднородные системы. При  $r = 0, 2$  эти системы однозначно разрешимы, а при  $r = 1$  появляется аналогичное (2.21) условие разрешимости, выполнения которого добиваемся за счет выбора  $\sigma_1$ . Указанная последовательность действий приводит к формулам

$$u_1 = 2\pi\delta\xi_0 [a_1 \exp(2\pi i\theta) + \bar{a}_1 \exp(-2\pi i\theta)] + \chi_0\xi_0^2 + \chi_2\xi_0^2 \exp(4\pi i\theta) + \bar{\chi}_2\xi_0^2 \exp(-4\pi i\theta) + \xi_1 [a \exp(2\pi i\theta) + \bar{a} \exp(-2\pi i\theta)], \quad \sigma_1 = \delta\kappa, \quad (4.11)$$

где, напомним,  $a_1$  — решение системы (2.8),  $\chi_0, \chi_2$  — векторы (2.4),  $\kappa = (D_0 a, b) \in \mathbb{R}$ . Что же касается амплитуды  $\xi_1 \in \mathbb{R}$ , то, как и  $\xi_0$ , она пока произвольна.

При  $k = 2$  в силу уже установленной информации (4.11) неоднородность  $f_2$  является линейной комбинацией гармоник  $\exp(\pm 2\pi i r\theta)$ ,  $0 \leq r \leq 3$ , а условие разрешимости системы (4.10) при  $k = 2$  в аналогичном классе функций задается равенством

$$[(A_1 a, b) + 2\pi\delta i(D_1 a, b) + 4\pi^2\delta^2 i(D_0 a_1, b) - 2\pi i\sigma_2]\xi_0 + d\xi_0^3 = 0. \quad (4.12)$$

Указанное равенство позволяет определить неизвестные постоянные  $\xi_0, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ . На этом пути для  $\xi_0$  получается требуемая формула, фигурирующая в (4.8).

Необходимо отметить, что описанный алгоритм нахождения коэффициентов рядов (4.9) может быть продолжен неограниченно. При этом на шаге с номером  $k$ ,  $k \geq 3$ , разрешимости соответствующей системы (4.10) в требуемом классе функций добиваемся за счет очередных постоянных  $\xi_{k-2}, \sigma_k$  (подчеркнем, что каждая функция  $u_k$ ,  $k \geq 1$ , содержит слагаемое вида  $\xi_k [a \exp(2\pi i\theta) + \bar{a} \exp(-2\pi i\theta)]$  с еще не найденной постоянной  $\xi_k \in \mathbb{R}$ ). При этом, что характерно для теории ветвления, при отыскании  $\xi_{k-2}, \sigma_k$  в отличие от (4.12) получается уже линейное неоднородное комплексное уравнение, из которого эти постоянные однозначно определяются.

По поводу обоснования приведенного алгоритма заметим следующее. Условия 1–4 и неравенство  $R(\delta) > 0$  при  $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$  гарантируют применимость к системе (4.3) бифуркационной теоремы Андронова–Хопфа. Таким образом, мы можем утверждать, что эта система имеет ненулевое периодическое решение амплитуды порядка  $\sqrt{\varepsilon}$  и периода  $T = 2\pi\sigma/\omega_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$ . Далее за счет выбора свободного параметра  $\sigma$  добиваемся выполнения равенства  $T = 1$ . В итоге получаем требуемую пару функций (4.4). Остается добавить, что описанный выше алгоритм — это способ подсчета коэффициентов их тейлоровских разложений по  $\sqrt{\varepsilon}$ . Теорема 4 доказана.

Для исследования устойчивости бегущих волн (4.5), (4.6) линеаризуем краевую задачу (4.1) на любой из них и в соответствующей линейной краевой задаче выполним замену  $\theta = \sigma_p(\varepsilon, \mu)t + px$ , т.е. перейдем к “бегущей” пространственной переменной  $\theta$ . В результате имеем дело с краевой задачей

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma(\varepsilon, \delta) \frac{\partial u}{\partial \theta} = \sqrt{\varepsilon} \delta (D_0 + \sqrt{\varepsilon} D_1) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathcal{A}(\theta, \varepsilon, \delta) u, \quad u(t, \theta + p) \equiv u(t, \theta), \quad (4.13)$$

где  $\mathcal{A}(\theta, \varepsilon, \delta) = F'_u(u, \varepsilon)|_{u=u(\theta, \varepsilon, \delta)}$ , а параметр  $\delta$ , принимающий дискретные значения  $\mu p / \sqrt{\varepsilon}$ , для удобства дальнейшего анализа будем считать непрерывно меняющимся на отрезке  $[\delta_1, \delta_2]$ . Полагая в (4.13) затем  $u = \exp(\lambda t)h$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , приходим к спектральной задаче

$$\lambda h + \sigma(\varepsilon, \delta) \frac{dh}{d\theta} = \sqrt{\varepsilon} \delta (D_0 + \sqrt{\varepsilon} D_1) \frac{dh}{d\theta} + \mathcal{A}(\theta, \varepsilon, \delta) h, \quad h(\theta + p) \equiv h(\theta). \quad (4.14)$$

Общее представление о характере расположения собственных значений задачи (4.14) можно получить (учитывая, что  $\mathcal{A}(\theta, 0, \delta) = A_0$ ) из упрощенного ее варианта

$$\lambda h + \sigma(\varepsilon, \delta) \frac{dh}{d\theta} = \sqrt{\varepsilon} \delta (D_0 + \sqrt{\varepsilon} D_1) \frac{dh}{d\theta} + A_0 h, \quad h(\theta + p) \equiv h(\theta). \quad (4.15)$$

Действительно, применяя к (4.15) метод Фурье по системе функций  $\exp(2\pi i k \theta / p)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , убеждаемся, что спектр данной задачи состоит из собственных значений матриц

$$A_0 + iz(D_0 + \sqrt{\varepsilon} D_1) - \sigma(\varepsilon, \delta) \frac{2\pi i k}{p} I, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.16)$$

где  $z = 2\pi k \delta \sqrt{\varepsilon} / p$ . Далее, из условий, наложенных нами на матрицы  $A_0$ ,  $D_0$ ,  $D_1$ , вытекает, что матрицы (4.16) заведомо являются гурвицевыми при  $|z| \sim 1$  и при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . Но в то же время у них имеется счетное число так называемых критических собственных значений, которые при  $\varepsilon, z \rightarrow 0$  стремятся к пределам

$$\lambda = -\frac{i\omega_0 k}{p}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.17)$$

Суммируя все сказанное выше, приходим к выводу, что проблема устойчивости бегущих волн (4.5), (4.6) сводится к анализу расположения критических собственных значений задачи (4.14), обращающихся при  $\varepsilon = 0$  в значения (4.17). Для построения их асимптотики заметим, что если  $\lambda$  — произвольное собственное значение данной задачи, то фигурирующее в (4.14) обыкновенное дифференциальное уравнение с 1-периодическими коэффициентами имеет мультипликатор,  $p$ -я степень которого равна единице. Тем самым собственному значению  $\lambda$  отвечает хотя бы одна собственная функция, допускающая представление  $h = \exp(2\pi i k \theta / p) v(\theta)$ , где  $k$  — некоторое целое число, а  $v(\theta + 1) \equiv v(\theta)$ . Учитывая это обстоятельство, мы вправе выполнить в (4.14) замены

$$h = \exp\left(\frac{2\pi i k \theta}{p}\right) v(\theta), \quad \lambda + \frac{i\sigma(\varepsilon, \delta) 2\pi k}{p} \rightarrow \lambda \quad (4.18)$$

и перейти к рассмотрению спектральной задачи

$$Pv \stackrel{\text{def}}{=} -\sigma(\varepsilon, \delta) \frac{dv}{d\theta} + (D_0 + \sqrt{\varepsilon} D_1) \left( izv + \delta \sqrt{\varepsilon} \frac{dv}{d\theta} \right) + \mathcal{A}(\theta, \varepsilon, \delta) v = \lambda v, \quad v(\theta + 1) \equiv v(\theta), \quad (4.19)$$

где параметр  $z = 2\pi k \delta \sqrt{\varepsilon} / p$  удобно считать меняющимся непрерывно.



Фигурирующий в (4.19) оператор  $\Pi$  будем рассматривать в пространстве  $H$ , представляющем собой комплексификацию введенного в разд. 1 пространства  $E$ . В силу соотношений (4.16)–(4.18) нас интересуют его собственные значения, стремящиеся к нулю при  $\varepsilon, z \rightarrow 0$ . В связи с этим обратим внимание, что при  $\varepsilon = z = 0$  данный оператор допускает двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции  $e_1(\theta) = a \exp(2\pi i\theta)$ ,  $e_2(\theta) = \bar{a} \exp(-2\pi i\theta)$ . А отсюда, опираясь на стандартную теорию возмущений (см., например, [16]), заключаем, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$ ,  $|z| \leq z_0$ , где  $\varepsilon_0, z_0 > 0$  достаточно малы, оператор  $\Pi$  имеет двумерное инвариантное подпространство

$$H_0 = \text{span}\{v_1(\theta, \varepsilon, \delta, z), v_2(\theta, \varepsilon, \delta, z)\} \subset H, \quad v_j(\theta, 0, \delta, 0) \equiv e_j(\theta), \quad j = 1, 2. \quad (4.20)$$

Инвариантность подпространства (4.20) означает существование такой матрицы второго порядка  $\Lambda(\varepsilon, \delta, z)$ ,  $\Lambda(0, \delta, 0) = 0$ , что

$$\Pi V = V \Lambda, \quad (4.21)$$

где по столбцам матрицы  $V$  размера  $n \times 2$  стоят базисные функции из (4.20). Отметим также, что, во-первых, матрицы  $V$  и  $\Lambda$  можно выбрать гладко зависящими от  $\sqrt{\varepsilon}$ ,  $\delta$ ,  $z$ , так как от этих параметров гладко зависят коэффициенты оператора  $\Pi$ ; во-вторых, имеем  $\det \Lambda(\varepsilon, \delta, 0) \equiv 0$  (при  $z = 0$  задача (4.19) допускает нулевое собственное значение с собственной функцией  $v = \partial u(\theta, \varepsilon, \delta)/\partial \theta$ ); в-третьих,  $\text{tr} \bar{\Lambda}(\varepsilon, \delta, -z) \equiv \text{tr} \Lambda(\varepsilon, \delta, z)$ ,  $\det \bar{\Lambda}(\varepsilon, \delta, -z) \equiv \det \Lambda(\varepsilon, \delta, z)$  (для проверки данных фактов достаточно применить к (4.21) операцию комплексного сопряжения, заменить  $z$  на  $-z$  и убедиться в итоге, что матрицы  $\Lambda(\varepsilon, \delta, z)$  и  $\bar{\Lambda}(\varepsilon, \delta, -z)$  имеют одинаковые собственные значения).

Исследование спектра матрицы  $\Lambda(\varepsilon, \delta, z)$  требует знания нескольких членов ее тейлоровского разложения по  $\sqrt{\varepsilon}$ ,  $z$ . Для их нахождения подставим в (4.21) ряды

$$\Lambda = z\Lambda_0 + z^2\Lambda_1 + \sqrt{\varepsilon}z\Lambda_2 + \varepsilon\Lambda_3 + \dots, \quad V = V_0 + zV_1 + \sqrt{\varepsilon}V_2 + \dots, \quad (4.22)$$

где  $V_0 = [e_1(\theta), e_2(\theta)]$ ,  $V_j = [v_{1j}, v_{2j}]$ ,  $j \geq 1$ . Приравнявая затем коэффициенты при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  и  $z$ , для отыскания функций  $v_{1j}$ ,  $v_{2j}$  получаем рекуррентную последовательность уравнений вида (4.10), а элементы матриц  $\Lambda_0$ ,  $\Lambda_1$  и т.д. определяем из условий разрешимости этих уравнений в классе тригонометрических полиномов переменной  $2\pi\theta$ . В результате приходим к равенствам

$$\Lambda_0 = i\kappa I, \quad \Lambda_1 = \text{diag}\{i(D_0 a_1, b), -i(D_0 \bar{a}_1, \bar{b})\}, \quad (4.23)$$

$$\Lambda_2 = \text{diag}\{4\pi\delta i(D_0 a_1, b) + i(D_1 a, b), 4\pi\delta i(D_0 \bar{a}_1, \bar{b}) + i(D_1 \bar{a}, \bar{b})\}, \quad \Lambda_3 = \xi_0^2 \begin{pmatrix} d & d \\ \bar{d} & \bar{d} \end{pmatrix},$$

где, напомним,  $d$  — величина (2.3),  $\xi_0$  — амплитуда из (4.8).

Для формулировки строгого результата об устойчивости бегущих волн (4.5), (4.6) введем в рассмотрение функцию

$$Q(\delta, z) = (\text{Re } d \cdot \xi_0^2 + z^2 \text{Re}[i(D_0 a_1, b)])^2 \times$$

$$\times \{2\xi_0^2 \text{Re}[\bar{d}i(D_0 a_1, b)] + z^2 |(D_0 a_1, b)|^2 - (4\pi\delta \text{Im}(D_0 a_1, b) + \text{Im}(D_1 a, b))^2\} -$$

$$- (4\pi\delta \text{Im}(D_0 a_1, b) + \text{Im}(D_1 a, b))^2 (\text{Im } d \cdot \xi_0^2 + z^2 \text{Re}(D_0 a_1, b))^2.$$

Справедлива

**Теорема 5.** *Предположим, что при всех  $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$ ,  $z \geq 0$  выполнено условие*

$$Q(\delta, z) > 0. \quad (4.24)$$

*Тогда бегущие волны (4.5), (4.6), доставляемые теоремой 4, экспоненциально орбитально устойчивы.*

Поясним происхождение условия (4.24). С этой целью заметим, что за устойчивость бегущей волны с любым номером  $p$  из семейства (4.6) отвечает в конечном итоге расположение спектра матриц

$$\Lambda_{p,k} = \Lambda(\varepsilon, \delta, z)|_{\delta=\mu p/\sqrt{\varepsilon}, z=2\pi k\mu}, \quad (4.25)$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ :  $2\pi|k|\mu \leq z_0$ , а  $z_0 > 0$  достаточно мало. Из формул (4.22), (4.23) и отмеченных выше общих свойств матрицы  $\Lambda(\varepsilon, \delta, z)$  вытекают следующие факты. Во-первых, при  $k = 0$  одно собственное значение матрицы (4.25) нулевое, а второе отрицательно; во-вторых, при  $k \neq 0$  гурвицевость  $\Lambda_{p,k}$  обеспечивается неравенством  $Q(\delta, z/\sqrt{\varepsilon})|_{\delta=\mu p/\sqrt{\varepsilon}, z=2\pi k\mu} > 0$ .

В заключение скажем несколько слов о реализуемости условия (4.24). Нетрудно увидеть, что в случае  $c_1 c_3 < 1$  (см. (3.2)) оно заведомо справедливо при  $\delta = \tilde{\delta}$ ,  $z \geq 0$ , где  $\tilde{\delta} = -\text{Im}(D_1 a, b)/(4\pi \text{Im}(D_0 a_1, b))$ . Далее, обращаем внимание, что всегда  $R(\tilde{\delta}) > 0$ , где  $R(\delta)$  — полином (4.7). Таким образом, выбирая в теореме 4 значения  $\delta_1, \delta_2$  достаточно близкими к  $\tilde{\delta}$ , мы добиваемся одновременного выполнения неравенств  $R(\delta) > 0$ ,  $Q(\delta, z) > 0$  при  $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$ ,  $z \geq 0$ . А это, в свою очередь, означает, что при условиях 1–4 и при  $c_1 c_3 < 1$ ,  $\mu/\sqrt{\varepsilon} \ll 1$  в краевой задаче (4.1) наблюдается явление буферности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов // ЖВМиМФ. 2006. Т. 46, № 10. С. 1809–1821.
2. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Многоликий хаос. М.: Физматлит, 2012.
3. Kapitaniak T., Chua L.O. Hyperchaotic attractors of unidirectionally-coupled Chua's circuits // Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. 1994. V. 4, N 2. P. 477–482.
4. Mariño I.P., Pérez-Muñuzuri V., Pérez-Villar V., Sánchez E., Matías M.A. Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // Physica D. 1999. V. 128. P. 224–235.
5. Perlikowski P., Yanchuk S., Wolfrum M., Stefanski A., Mosiolek P., Kapitaniak T. Routes to complex dynamics in a ring of unidirectionally coupled systems // Chaos. 2010. V. 20, N 1. Pap. 013111.
6. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых цепочках однонаправленно связанных уравнений // ТМФ. 2013. Т. 175, № 1. С. 62–83.
7. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием // Изв. РАН. Сер. мат. 2013. Т. 77, № 2. С. 53–96.
8. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Диф. уравнения. 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244.
9. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
10. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.
11. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
12. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау // ТМФ. 2009. Т. 158, № 2. С. 292–311.
13. Колесов Ю.С. Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 3. С. 121–136.
14. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.
15. Frederickson P., Kaplan J.L., Yorke E.D., Yorke J.A. The Liapunov dimension of strange attractors // J. Diff. Eqns. 1983. V. 49, N 2. P. 185–207.
16. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.